# Soluzioni VI

26/11/2002

Continuità in $\mathbb{R}^2$

**Esercizio 1.** Considero $z, w \in B_1(0)$ e sia $\epsilon > 0$. Poniamo anche $|z| = |z|_2 \, \forall z \in \mathbb{R}^2$. Devo trovare $\delta : ||z|^2 - |w|^2| < \epsilon$ se $|z-w| < \delta$. Sarà dunque $||z|^2 - |w|^2| = ||z| - |w||(|z| + |w|) \leqslant |z-w|(|z|+|w|) < 2\delta < \epsilon$. Pongo dunque $\delta = \epsilon/2$. Notiamo che $\delta$ non dipende ne da $z$ ne da $w$. (Ricordo che $||z| - |w|| \leqslant |z-w|$, e che $z, w \in B_1(0)$ quindi $|z|, |w| < 1$ ).

**Esercizio 2.** (i) Considero la funzione $t^{\frac{\alpha}{2}}$ nel punto $t_0 = 1$. Per il Teorema di Lagrange, essendo $t^{\frac{\alpha}{2}}$ derivabile con derivata continua, possiamo affermare che $\exists \xi \in B_{|t-1|}(1) : \ t^{\frac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{\alpha}{2}\xi^{\frac{\alpha}{2}-1}(t-1)$, con $|t-1| < 1/2$ per evitare valori negativi di $t$ per i quali la funzione $t^{\frac{\alpha}{2}}$ non è definita. Quindi, maggiorando, $|t^{\frac{\alpha}{2}} - 1| \leqslant (\sup_{B_{|t-1|}(1)} \frac{\alpha}{2}\xi^{\frac{\alpha}{2}-1})|t-1| \leqslant C_\alpha |t-1|$, dove $C_\alpha = \sup_{B_{1/2}(1)} \frac{\alpha}{2}\xi^{\frac{\alpha}{2}-1}$, se $|t-1| < 1/2$. Notiamo che $C_\alpha$ esiste perchè stiamo facendo il sup su un insieme limitato di una funzione continua nella sua chiusura. Studiamo ora $|x^2+y^2-1| = ||(x,y)|^2 - |(0,1)|^2| = ||(x,y)| - |(0,1)||(|(x,y)| + |(0,1)|) \leqslant |(x,y) - (0,1)|(|(x,y)| + |(0,1)|) = |(x,y-1)|(|(x,y)| + |(0,1)|) \leqslant 3\delta$ se $|(x,y-1)| < \delta < 1$ (infatti $|(x,y)| + |(0,1)| < 1 + \delta + 1 < 3$). Tornando alla nostra funzione e sfruttando quanto visto finora possiamo affermare che: $|(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} - 1| \leqslant C_\alpha |x^2+y^2-1| = C_\alpha ||(x,y)|^2 - |(0,1)|^2| \leqslant 3C_\alpha\delta < \epsilon$, se $3\delta < 1/2 \Leftrightarrow \delta < 1/6$. Infatti sotto quest'ultima condizione si ha che $|x^2+y^2-1| < 1/2$ e quindi possiamo applicare lo studio fatto sulla funzione $t^{\frac{\alpha}{2}}$ con $t = x^2+y^2$. Pongo quindi $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{3C_\alpha}, \frac{1}{3}\}$. Possiamo anche cercare di scrivere analiticamente il valore di $C_\alpha$. Ci sono da distinguere tre casi: $\frac{\alpha}{2} > 1, \frac{\alpha}{2} = 1, \frac{\alpha}{2} < 1$: nel primo caso la funzione è crescente e quindi il sup si verificherà per $\xi = 3/2$ quindi $C_\alpha = \frac{\alpha}{2}(\frac{3}{2})^{\frac{\alpha}{2}-1}$. Nel secondo $\frac{\alpha}{2} = 1$ e quindi $C_2 = 1$. Nel terzo la funzione è decrescente e quindi il sup si verificherà per $\xi = 1/2$ dunque $C_\alpha = \frac{\alpha}{2}(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}-1}$.
Ora consideriamo $(x_0, y_0) = (0,0)$. Devo trovare $\delta : (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} < \epsilon$ con $|(x,y)| < \delta$. Si ha, banalmente, $(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} = |(x,y)|^\alpha < \delta^\alpha < \epsilon \Leftrightarrow \delta = \sqrt[\alpha]{\epsilon}$.

(ii) Siano $t, t_0 \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione $\sin t$. Per il Teorema di Lagrange $\exists \xi \in B_{|t-t_0|}(t_0)$ tale che $\sin t - \sin t_0 = (t-t_0)\cos\xi$. Passando quindi ai moduli e maggiorando otteniamo $|\sin t - \sin t_0| \leqslant |t-t_0| \sup_{\mathbb{R}} \cos\xi = |t-t_0|$ per ogni $t, t_0 \in \mathbb{R}$. Sia $(x_0, y_0) = (-1,-1)$, stimiamo $|\sin\frac{1}{xy^2} - \sin(-1)| \leqslant$

$|\frac{1}{xy^2} - (-1)| = |\frac{1+y-y-y^2+y^2+xy^2}{xy^2}| \leqslant \frac{|1+y|}{|x|y^2} + |y|\frac{|y+1|}{|x|y^2} + y^2\frac{|x+1|}{|x|y^2}$. Ora se prendo $\delta < 1/2$ e $|(x,y) - (-1,-1)| < \delta$ si avrà $-3/2 < x, y < -1/2$ quindi $|x|, |y| > 1/2$, e $|x - (-1)|, |y - (-1)| < \delta$. Dunque $|\sin\frac{1}{xy^2} - \sin(-1)| \leqslant 2\delta + 4\delta + 8\delta = 14\delta < \epsilon$. Prendo quindi $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{14}, \frac{1}{2}\}$.

(iii) Sia $t_0 = 1$ e $t \in B_\eta(1)$, $0 < \eta < 1$ allora usando il Teorema di Lagrange e maggiorando la derivata prima del logaritmo otteniamo la stima $|\log t - \log 1| \leqslant |t-1| \sup_{B_\eta(1)} 1/\xi \leqslant \frac{|t-1|}{1-\eta}$. Ora, tralasciando per il momento questa considerazione, studiamo $\cos t - 1 = \cos t - \cos 0$. Usando il polinomio di Taylor in 0 al primo ordine con il resto di Lagrange possiamo affermare che $\exists\xi$ con $|\xi| \leqslant t$ e $\cos t = \cos 0 - t\sin 0 - \frac{t^2}{2}\cos\xi = 1 - \frac{t^2}{2}\cos\xi$ . Quindi $|\cos t - 1| \leqslant \frac{t^2}{2}$. Ora torniamo al nostro problema; avevamo che $|(x,y)| < \delta$ quindi $|x|, |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |(x,y)|$, da cui $|xy| = |x||y| \leqslant |(x,y)|^2 < \delta^2$. Allora $|\cos xy - 1| \leqslant \frac{(xy)^2}{2} \leqslant \frac{\delta^4}{2}$, pongo $\eta = \min\{\frac{\delta^4}{2}, 1\} = \frac{\delta^4}{2}$ se, per esempio, $\delta < 1$. Dunque $|\log\cos xy| \leqslant \frac{|\cos xy - 1|}{1-\delta^4/2} < 2|\cos xy - 1| \leqslant 2\frac{\delta^4}{2} < \epsilon$. Sia quindi $\delta = \min\{\sqrt[4]{\epsilon}, 1\}$. Osserviamo che anche in questo esercizio, come nei precedenti, potevamo usare il Teorema di Lagrange, ma usando il polinomio di Taylor ci spingiamo fino ad un ordine maggiore e quindi otteniamo una valore migliore per $\delta$.

(iv) La serie $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(x^2+y^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{e^{x^2+y^2}}]^k$ è una serie geometrica con ragione $q = \frac{1}{e^{x^2+y^2}}$. La serie converge se $q < 1 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0)$ quindi prendiamo, per esempio, $\delta < 1/2$. Con questa condizione abbiamo $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(x^2+y^2)} = \frac{1}{1-e^{-(x^2+y^2)}} = \frac{e^{x^2+y^2}}{e^{x^2+y^2}-1}$ e $f(x_0, y_0) = f(1,1) = \frac{e^2}{e^2-1}$. Vogliamo quindi che $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |\frac{e^{x^2+y^2}}{e^{x^2+y^2}-1} - \frac{e^2}{e^2-1}| < \epsilon$.
Allora $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = \frac{1}{e^2-1}\frac{|e^{x^2+y^2}-e^2|}{e^{x^2+y^2}-1}$. Ora se $\delta < 1/2$ e $(x,y) \in B_\delta((1,1))$ abbiamo che $\sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{2} - 1/2$ quindi $x^2+y^2 > (\sqrt{2}-1/2)^2 = 9/4 - \sqrt{2} > 1/2 \Rightarrow e^{x^2+y^2} - 1 > e^{1/2} - 1$. Quindi $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant \frac{1}{(e^2-1)(e^{1/2}-1)}|e^{x^2+y^2} - e^2|$. Consideriamo ora la funzione $e^t$ in un intorno di raggio 1 del punto $t_0 = 2$. Per il Teorema di Lagrange si ha $|e^t - e^2| \leqslant |t-2| \sup_{B_1(2)} e^\xi = e^3|t-2|$. Quindi $|e^{x^2+y^2} - e^2| \leqslant e^3|x^2+y^2-2|$ se $|x^2+y^2-2| < 1$. Quindi $|x^2+y^2-2| = ||(x,y)|^2 - |(1,1)|^2| \leqslant ||(x,y)| - |(1,1)||(|(x,y)| + |(1,1)|) \leqslant \delta(2+\sqrt{2}+1/2) < 4\delta < 1$ se $\delta < 1/4$. Infine $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leqslant \frac{1}{(e^2-1)(e^{1/2}-1)}|e^{x^2+y^2} - e^2| < \frac{e^3}{(e^2-1)(e^{1/2}-1)}|x^2+y^2-2| < \frac{4e^3}{(e^2-1)(e^{1/2}-1)}\delta = c\delta < \epsilon$. Pongo quindi $\delta = \min\{\epsilon/c, \frac{1}{4}\}$, dove $c = \frac{4e^3}{(e^2-1)(e^{1/2}-1)}$.

(v) Consideriamo, come al solito, $\tanh t$, per il Teorema di Lagrange

$|\tanh t - \tanh 2| \leqslant (\sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh^2 \xi})|t-2| = |t-2|$ per ogni $t$. Osserviamo che restringendoci ad un intorno più piccolo di 2 avremmo avuto una stima migliore (infatti avremmo ristretto il dominio su cui calcolare l'estremo superiore) ma il fattore che ci interessa è $|t-2|$. Prendiamo ora $|(x,y)-(1,1)| \leqslant \delta$. Quindi $|\tanh(|x|+|y|) - \tanh 2| \leqslant ||x|+|y|-2| = ||x|-1+|y|-1| \leqslant ||x|-1| + ||y|-1| \leqslant |x-1| + |y-1| \leqslant 2\delta < \epsilon$. Infatti, per esempio, $|x-1| \leqslant \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = |(x,y)-(1,1)| \leqslant \delta$, analogamente anche $|y-1| \leqslant \delta$. Prendo quindi $\delta = \epsilon/2$.