AM1b, a.a. 2002-2003 - Esercizi 3 [Soluzioni]

Silvia Mataloni, Giampiero Palatucci

24 marzo 2003

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{n\to\infty}(e^n - 2^n) = +\infty$; $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-2}-3^n}{e^{n+1}} = -\infty$; $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}} = 1$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^2} = 1$;

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n} = 4$.

Calcoliamo il secondo limite.

Si ha:

$$\frac{2^{n-2}-3^n}{e^{n+1}} = \frac{\frac{2^n}{2^2}-3}{ee^n} = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{2}{e}\right)^n - \left(\frac{3}{e}\right)^n\right) \to -\infty.$$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n = \sqrt[3]{e}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n} = e^2$.

Il primo limite è immediato.

Si ha:

$$\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} \to e^{\frac{1}{3}}.$$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2-n+2}\right)^n = e^2$; $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n}{n^2-n+1}\right)^{n^2} = \dfrac{1}{e}$; $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2}{n^2+n-1}\right)^{n^2} = 0$.

Per calcolare il secondo limite, cerchiamo x_n tale che:

$$\frac{n^2-n}{n^2-n+1} = 1 + \frac{1}{x_n},$$

da cui

$$x_n = -(n^2 - n + 1).$$

Con tale scelta di x_n, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 - n + 1} \right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n} \right]^{\frac{n^2}{x_n}}.$$

Ora, per n che tende ad infinito, la successione in parentesi quadra converge ad e, mentre il rapporto $\frac{n^2}{x_n}$ converge a -1. Quindi, la successione data converge a e^{-1}.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{2}{n} = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 - n^2 \cos \frac{3}{n} \right) = \dfrac{9}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \tan \frac{1}{n} = +\infty$;

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(\tan \frac{2}{n} - \sin \frac{2}{n} \right) = 0.$

Calcoliamo l'ultimo limite, utilizzando la definizione di tangente, i.e. $\tan \frac{2}{n} = \frac{\sin \frac{2}{n}}{\cos \frac{2}{n}}$.
Si ha:

$$n^2 \left(\tan \tfrac{2}{n} - \sin \tfrac{2}{n} \right) = n^2 \left(\frac{\sin \frac{2}{n} (1 - \cos \frac{2}{n})}{\cos \frac{2}{n}} \right) = \frac{\sin \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{2}{n}} \cdot \frac{1 - \cos \frac{2}{n}}{\frac{4}{n^2}} \cdot \frac{8}{n} \to 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \right)^n \sin \frac{3}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\tan \frac{1}{n}}{\tan \frac{2}{n^2}} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2 + n + 1) - 2 \ln n}{1 - \cos \frac{1}{n}} = +\infty.$

Calcoliamo l'ultimo limite.
Si ha:

$$(\ln(n^2 + n + 1) - 2 \ln n) = \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2} \right) = \ln \left[\left(1 + \frac{n + 1}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{n+1}} \right]^{\frac{n+1}{n^2}}$$

e

$$\frac{1}{1 - \cos \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \cos \frac{1}{n}} \cdot n^2.$$

Da cui:

$$\frac{\ln(n^2 + n + 1) - 2 \ln n}{1 - \cos \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \cos \frac{1}{n}} \cdot n^2 \cdot \frac{n + 1}{n^2} \cdot \ln \left[\left(1 + \frac{n + 1}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{n+1}} \right] \to +\infty.$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2}-n)=0;\quad \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=+\infty;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\sqrt{\ln n^3+(\ln n)^2}}}{n^2}=0.$

Per calcolare il primo limite, sfruttiamo l'uguaglianza $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, con $a=\sqrt[3]{n^3+2}$ e $b=n$.

Si ha:

$$(\sqrt[3]{n^3+2}-n)=\frac{n^3+2-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2}+n^2}=\frac{2}{\sqrt[3]{(n^3+2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2}+n^2}\to 0.$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\ln n}=1;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\cos n}{n}=0;\quad \lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2(n+3)-n^2)=-\infty.$

Questi limiti si possono calcolare facilmente utilizzando i "teoremi di confronto".

Per il primo limite, abbiamo:

$$\ln n<n \text{ per ogni } n\in\mathbb{N},\quad \ln n>1 \text{ per } n\geq 3.$$

Da cui (per $n\geq 3$):

$$n<n\ln n<n^2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{n\ln n}<\sqrt[n]{n^2}.$$

Poiché $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$, anche $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\ln n}=1$.