4. ESERCIZI SULLE SUCCESSIONI NUMERICHE

ESERCIZIO 1
Facendo uso, all' occorrenza, dei limiti notevoli, trovare il limite delle seguenti successioni:
(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin\frac{1}{n}(\ln n)^2}{(n+1)^2}$
(ii) $\lim_{n\to\infty} n\left[(n+2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right]$
(iii) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{n+1}}$
(iv) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n$
(v) $\lim_{n\to\infty} (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$
(vi) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$
(vii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n} - \sqrt{n^2+4}$

ESERCIZIO 2
Facendo uso della *definizione* di limite, dimostrare che:
$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-8n+4}{n-4} = +\infty$
$\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$
$\lim_{n\to\infty} e^{1+\frac{1}{n}} = e$

ESERCIZIO 3
Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la successione

$$a_n = \frac{(\cos n)\ln(5+e^{2n})}{n^\alpha}$$

é limitata e per quali valori ha limite.

ESERCIZIO 4
Teoremi di Cesaro:
Teorema 1: Se la successione di termine generale a_n ha per limite l, finito o infinito, allora si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = l$.
Teorema 2: Se $a_n > 0$ é tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, finito o infinito, allora si ha $\lim_{n\to\infty}(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.

Teorema 3: Sia a_n tale che $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = l$, finito o infinito, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = l$.
Teorema 4: Se $a_n > 0$ é tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, finito o infinito, allora $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = l$.
Utilizzando i Teoremi di Cesaro, calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+....+n^{\frac{1}{n}}}{n}$,
(b) $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}$,
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$,
(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{2n}}}{n}$.

ESERCIZIO 5
Verificare che una successione a_n converge ad un numero l se e solo se entrambe le sottosuccessioni a_{2n} e a_{2n-1} convergono allo stesso limite l.

ESERCIZIO 6
Supponiamo che le successioni a_{2n} e a_{2n-1} estratte da una successione a_n siano entrambre monotone. Dimostrare che, se $\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) = 0$, allora a_n ammette limite.

ESERCIZIO 7
Verificare con un esempio che l' enunciato dell'esercizo precedente non é invertibile, cioé esistono successioni a_n che ammettono limite, tali che a_{2n} e a_{2n-1} sono monotone ma $\lim_{n\to\infty}(a_{2n} - a_{2n-1}) \neq 0$.