# 1. SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SU ESTREMO SUPERIORE E INFERIORE DI INSIEMI

$(A)$: $\{x = n - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$
L' insieme é limitato inferiormente essendo composto da elementi non negativi. Quindi 0 é un minorante. Inoltre $0 \in A$, quindi $\min A = 0$. L' insieme non é peró limitato superiormente, come si puó facilmente verificare: $\forall M > 0$ arbitrariamente grande $\exists \overline{x} \in A{:}\, \overline{x} > M$.
Quindi $\sup A = +\infty$.

$(B)$: $\{x = (-1)^n n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$
L'insieme non é limitato né inferiormente né superiormente, poiché il termine $(-1)^n n$ diverge a $+\infty$ se $n$ é pari e a $-\infty$ se $n$ é dispari.

$(C)$: $\{x = \frac{n-3}{n^2},\ n \in \mathbb{N}\} \cup (-1, 1)$
L' insieme é limitato inferiormente da $-2$, che é anche un minimo (lo si ottiene per $n = 1$). La frazione $\frac{n-3}{n^2}$ ha un andamento decrescente da $n = 4$ in poi e si avvicina sempre di piú a zero. A questo punto si deve considerare l' unione con l' intervallo $(-1, 1)$, per cui $\sup C = 1$.

$(D)$: $\{x = n^2 + 3n - 1,\ n \in \mathbb{N}\}$
Il polinomio $n^2 + 3n - 1$ é crescente per $n \geq 1$, quindi il valore piú piccolo lo si ottiene per $n = 1$, quindi l' insieme é limitato inferiormente e $\min D = 3$. Non é limitato superiormente: basta verificare che $\forall M$ arbitrariamente grande esiste $\overline{n}$ tale che $\overline{n}^2 + 3\overline{n} - 1 > M$.

$(E)$: $\{x \in \mathbb{R}{:}\, x^2 \leq 2\}$
Si ha $x^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, per cui $\min E = -\sqrt{2},\ \max E = \sqrt{2}$.

$(F)$: $\{x \in \mathbf{Q}{:}\, x^2 \leq 2\}$
Analogamente all' esercizio precedente si verifica che $F$ é limitato, ma non ammette né minimo né massimo dato che $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, quindi $\inf F = -\sqrt{2},\ \sup F = \sqrt{2}$.

$(G)$: $\{x^3{:}\, x \in \mathbf{Z}\}$
L' insieme non é limitato, $\inf G = -\infty,\ \sup G = +\infty$.

$(H)$: $\{x = sin\frac{n\pi}{8},\ n \in \mathbb{N}\}$
L' insieme é sicuramente limitato, dato che la funzione $\sin x$ assume valori compresi tra $-1$ e $+1$. Cerchiamo due valori $n_1$ e $n_2$ per cui si abbia $\sin\frac{n_1\pi}{8} = -1$ e $\sin\frac{n_2\pi}{8} = +1$. Quindi risolviamo

$$\frac{n_1\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \Leftrightarrow\ n_1 = 4 + 16k$$

$$\frac{n_2\pi}{8} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \Leftrightarrow\ n_2 = 12 + 16k.$$

Deduciamo che $\min H = -1,\ \max H = +1$.

$(I)$: $\{x = \frac{t+1}{t-2},\ t \in \mathbb{R}\ \ t > 2\}$
Si deduce immediatamente che $\frac{t+1}{t-2} > 1\ \forall t > 2$. Quindi l' insieme é limitato inferiormente. Inoltre $1 = \inf I$, infatti comunque scelto $\varepsilon > 0$, esisterá $t_1$ tale che $1 + \varepsilon > \frac{t_1+1}{t_1-2}$. Quest' ultima relazione é verificata per $t_1 > \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}$. Non si ha invece limitatezza superiore: $\forall M \in \mathbb{R}$ arbitrariamente grande esiste $t_2$ tale che

$$\frac{t_2+1}{t_2-2} > M \Rightarrow t_2 + 1 > t_2M - 2M \ \Rightarrow\ t_2(M-1) < 1 + 2M \ \Rightarrow\ t_2 < \frac{1+2M}{M-1}.$$

Verifichiamo che $t_2 > 2$:
$\frac{1+2M}{M-1} > 2 \ \Leftrightarrow\ 1 + 2M > 2M - 2$, sempre verificato.

$(L)$: $\{|x| : x^2 + x < 2,\ x \in \mathbb{R}\}$
Risolviamo l' equazione $x^2+x-2 < 0$, che é verificata per $-2 < x < 1$. Dovendo prendere in considerazione i moduli, valutiamo i valori assoluti degli $x \in (-2, 1)$. Otteniamo $0 < |x| < 2$, quindi l' insieme $L$ é limitato sia inferiormente che superiormente, $\min L = 0,\ \sup L = 2$. Osserviamo che 2 non é un massimo.