

Tutorato di AM1a

Topologia

Fabrizio Fanelli

Dire se sono distanze in \mathbb{R} le seguenti espressioni :

1. $d_1(x, y) \equiv |x - y|^2$

2. $d_2(x, y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } y \neq x \end{cases}$

3. $d_3(x, y) \equiv |x + y|$

Soluzione. 1) È una distanza. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare considerate tutti i possibili casi: $x \neq y \neq z$; $x \neq y, y = z$; $x \neq y, x = z$; $x = y, x \neq z, y \neq z$.

Soluzione. 2) non verifica la disuguaglianza triangolare: per esempio prendete la distanza tra 1 e -1 che è maggiore della somma delle distanze tra -1 e 0 e tra 0 e 1.

Soluzione. 3) Non è una distanza: non rispetta la proprietà: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, infatti per $x = y$ la distanza è $|2x|$, che in generale è diversa da zero.

Trovare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi :

1. $I = \{(1, 2)\}$

2. $L = \{(1, 2) \cup \{3\}\}$

3. $M = \left\{1, 2, 3, \frac{10}{3}, \frac{20}{3}, 15\right\}$

4. $N = \left\{\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

5. $O = \left\{\frac{3n-1}{2n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

$$6. P = \left\{ \frac{n^3}{n!}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$7. Q = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$8. R = \left\{ \frac{\sqrt{n-1}}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$9. S = \left\{ \frac{n+1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$10. T = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$11. U = \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{5n^2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$12. V = \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{5n^4}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$13. Z = \left\{ m + \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Soluzione. $\bar{I} = [1, 2]$. Infatti se $p \in I \forall \epsilon > 0$ scelgo $i \in I$ cos:

$$i = p + \frac{\min(|1-p|, |2-p|, \epsilon)}{2}, i \in \{I \cap I(p, \epsilon)\} \setminus \{p\}.$$

Verifichiamo che anche 2 un punto di accumulazione per I . $\forall \epsilon > 0$ scelgo

$$j = 2 - \frac{\min(\epsilon, |2-1|)}{2}, \text{ e sicuramente } j \in \{I \cap I(2, \epsilon)\} \setminus \{2\}.$$