

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
AL 1
Esercizi per casa, II prova (25 ottobre 2002)

Consegnare entro mercoledì 6 novembre.

1. Siano A, B, C, D insiemi.
 - (a) Dimostrare che $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.
 - (b) Mostrare con un esempio che, in generale, $(A \times B) \cup (C \times D) \subsetneq (A \cup C) \times (B \cup D)$.
2. Determinare quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica e totale sono soddisfatte dalle seguenti relazioni:
 - (a) $x, y \in \mathbb{Z}, x \rho y \iff x$ e y sono entrambi negativi o entrambi non negativi.
 - (b) $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}, x \rho y \iff (x, y) \in \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$.
 - (c) $A, B \in P(S), A \rho B \iff A \cup B = S$, dove S è un insieme (non necessariamente non vuoto) e $P(S)$ è l'insieme delle parti di S .
 - (d) $x, y \in \mathbb{Z}, x \rho y \iff x = y^2$.
3. Sia ρ la relazione su \mathbb{Z} tale che $a \rho b$ se e soltanto se 5 divide $a + 4b$.
 - (a) Provare che ρ è una relazione di equivalenza.
 - (b) Determinare $[0]_\rho$, la classe di equivalenza di 0 rispetto a ρ .
 - (c) Dimostrare che $[-2]_\rho = 5\mathbb{Z} + 3$.
 - (d) Determinare e descrivere gli elementi distinti dell'insieme quoziente \mathbb{Z}/ρ .
4.
 - (a) Determinare un inverso moltiplicativo del numero complesso $5 + i$.
 - (b) Determinare parte reale e parte immaginaria del numero complesso $(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - i))^4$.
5. Scrivere:
 - (a) 1023 in base 5.
 - (b) 53 in base 2.
 - (c) 777 in base 7.