AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2002/2003

Appello A - I Parte

esercizio	1	2	3	4	5
punti max	6	3	(8, 4)	(4, 3)	(6, 3)

ESERCIZIO 1. Si consideri l'applicazione:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \quad x \mapsto 2 + 3x\,,$$

e si ponga per induzione $f^n := f \circ f^{n-1}$, per ogni $n \geq 2$ (dove, ovviamente, $f^1 = f$).
Provare per induzione su $n \geq 1$ che vale una delle seguenti formule:

(a) $f^n(x) = 2 + 3^{n-1} + 3^n x\,;$
(b) $f^n(x) = 3^n + 3^n x\,;$
(c) $f^n(x) = (3^n - 1) + 3^n x\,.$

ESERCIZIO 2. Nell'insieme $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, si consideri la relazione $\boldsymbol{\rho}$ definita nella maniera seguente:

$$a + bi \;\boldsymbol{\rho}\; c + di \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, m\,,\ n \in \mathbb{N}\,, \text{ in modo tale che } c = ma\,,\ b = nd\,.$$

Stabilire quali tra le seguenti proprietà:

(R) proprietà riflessiva;
(S) proprietà simmetrica;
(AS) proprietà antisimmetrica;
(T) proprietà transitiva;
(TT) proprietà totale;

sono soddisfatte da $\boldsymbol{\rho}$.
Stabilire, quindi se $\boldsymbol{\rho}$ è una relazione di equivalenza **(E)** oppure una relazione di ordine **(O)** su $\mathbb{Z}[i]$.

ESERCIZIO 3. **(1)** Sia $f : S \to T$ un'applicazione tra insiemi non vuoti. Siano:

$$\begin{array}{ll} f_* : & \boldsymbol{P}(S) \to \boldsymbol{P}(T)\,,\ X \mapsto f(X)\,,\quad X \in \boldsymbol{P}(S)\,, \\ f^* : & \boldsymbol{P}(T) \to \boldsymbol{P}(S)\,,\ Y \mapsto f^{-1}(Y)\,,\quad Y \in \boldsymbol{P}(T)\,. \end{array}$$

le applicazioni, tra gli insiemi delle parti, associate canonicamente ad f.
Dimostare che:

$$\begin{array}{c} f \text{ iniettiva } \Leftrightarrow f_* \text{ iniettiva }; \\ f \text{ suriettiva } \Leftrightarrow f^* \text{ iniettiva }. \end{array}$$

Dare un esempio per mostrare che f può essere suriettiva e l'applicazione associata, f^*, può non essere suriettiva.

(2) Sia $f : S \to T$ un'applicazione suriettiva tra insiemi non vuoti e sia W un altro insieme non vuoto. Mostrare che l'applicazione (associata ad f) definita nella maniera seguente:

$$\begin{array}{rcl} W^T := \{g : T \to W \mid g \text{ applicazione}\} \to & & W^S := \{h : S \to W \mid h \text{ applicazione}\} \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

è un'applicazione iniettiva.

ESERCIZIO 4. Si consideri l'applicazione:

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ \ a + ib \mapsto a + b + iab\,,$$

(1) Mostrare con degli esempi che f non è un'applicazione iniettiva né suriettiva.
(2) Descrivere la relazione di equivalenza "nucleo di f", definita su $\mathbb{C}$.

ESERCIZIO 5: Complementi
Siano $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ tre proposizioni.

(1) Scrivere la tabella di verità delle proposizioni:
  (a) $(\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \Rightarrow \boldsymbol{R}\,;$
  (b) $(\boldsymbol{P} \wedge (\neg \boldsymbol{R})) \Rightarrow (\neg \boldsymbol{Q})\,.$
(2) Stabilire se le proposizioni in **(a)** ed in **(b)** sono oppure non sono logicamente equivalenti.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. (c) Base dell'induzione $n=1$: $f(x)=(3-1)+3x$. Se (per ipotesi induttiva) $f^{n-1}(x)=(3^{n-1}-1)+3^{n-1}x$, allora $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))=f((3^{n-1}-1)+3^{n-1}x)=(3-1)+3\left((3^{n-1}-1)+3^{n-1}x\right)=(3^n-1)+3^n x$.

(a) e (b) non sono validi ad esempio per $n=2$.

ESERCIZIO 2. Basta osservare che:

$$a+bi \,\boldsymbol{\rho}\, c+di \quad \Leftrightarrow \quad a \,|_{\mathbb{N}}\, c \,\wedge\, b \,|_{\mathbb{N}}\, d\,,$$

per concludere che valgono (R), (AS), (T) (ma non (S) e (TT)) e quindi che $\boldsymbol{\rho}$ è una relazione di ordine.

ESERCIZIO 3. E' sviluppato nel libro consigliato [FG].

ESERCIZIO 4. **(1)** f non è iniettiva: $f(i)=1=f(1)$. f non è suriettiva: $i\notin \mathrm{Im}(f)$ (non esistono $a,b\in\mathbb{R}$ in modo tale che $a+b=0$ e $ab=1$).

(2) $a+ib\,\kappa_f\, a'+ib' \quad \Leftrightarrow \quad a+b=a'+b' \,\wedge\, ab=a'b'$.

ESERCIZIO 5.

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{P\Rightarrow Q}$	$\boldsymbol{(P\Rightarrow Q)\Rightarrow R}$	$\boldsymbol{P\wedge(\neg R)}$	$\boldsymbol{(P\wedge(\neg R))\Rightarrow(\neg Q)}$
v	v	v	v	v	f	v
v	v	f	v	f	v	f
v	f	v	f	v	f	v
v	f	f	f	v	v	v
f	v	v	v	v	f	v
f	v	f	v	f	f	v
f	f	v	v	v	f	v
f	f	f	v	f	f	v

Quindi (a) e (b) non sono logicamente equivalenti.

AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2002/2003

Appello A - II Parte

esercizio	1	2	3	4	5	6
punti max	5	(2, 3, 3)	(4, (2, 2, 4))	(3, 3, 6)	6	(5, 10)

ESERCIZIO 1. Determinare tutte le eventuali soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 7X \equiv 2 \pmod 9 \\ 4X \equiv 10 \pmod{11} \\ -2X \equiv 5 \pmod 7 \,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. **(1)** Verificare se l'applicazione

$$f : \left(\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}, +\right) \to \left(\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}, +\right), \quad \overline{x} := x + 8\mathbb{Z} \mapsto 2x + 8\mathbb{Z} = 2\overline{x}$$

è un omomorfismo di gruppi.

(2) Verificare che l'insieme $H := \left\{\overline{x} \in \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \mid f(f(\overline{x})) = f(\overline{x})\right\}$ è un sottogruppo (normale) di $\left(\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}, +\right)$

(3) Descrivere i gruppi-quoziente di $\left(\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}, +\right)$ rispetto a ciascuno dei suoi due sottogruppi (normali) $\mathrm{Ker}(f)$ ed H.

ESERCIZIO 3. **(1)** Enunciare il Teorema Fondamentale dell'Omorfismo tra anelli.

(2) Sia T un sottoinsieme non vuoto di un insieme S e sia $(\boldsymbol{P}(S), \Delta, \cup)$ l'anello di tutti i sottoinsiemi di S [dove l'operazione Δ in $\boldsymbol{P}(S)$ è definita nella seguente maniera: $X \Delta Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$].
Mostrare che:

(a) $\boldsymbol{P}(T)$ è un ideale di $(\boldsymbol{P}(S), \Delta, \cup)$;

(b) l'applicazione:

$$f : \boldsymbol{P}(S) \to \boldsymbol{P}(T), \quad X \mapsto X \cap T,$$

è un omomorfismo di anelli.

(c) esiste un isomorfismo canonico tra l'anello-quoziente $\boldsymbol{P}(S)/\boldsymbol{P}(T)$ ed uno tra i seguenti anelli:

(i) $(\boldsymbol{P}(S \times T), \Delta, \cup)$;
(ii) $(\boldsymbol{P}(T \setminus S), \Delta, \cup)$;
(iii) $(\boldsymbol{P}(S \setminus T), \Delta, \cup)$.

ESERCIZIO 4. Si consideri l'insieme R di tutte le matrici del tipo:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a\,,\ b \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\,.$$

(1) Dimostrare che R è un sottoanello, ma non un ideale, dell'anello di tutte le matrici $\left(\boldsymbol{M}_{2,2}\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right), +, \cdot\right)$.

(2) Stabilire se $(R, +, \cdot)$ è commutativo, se è unitario, se $(R, +, \cdot)$ è un campo.

(3) Dimostrare che il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili $(\boldsymbol{U}(R), \cdot)$ dell'anello $(R, +, \cdot)$ è un gruppo ciclico, determinandone un generatore.

ESERCIZIO 5. Dati due polinomi $f(T) := 3 + T + 4T^2 + T^3 + T^4$, $g(T) := 3 + T^2 + T^3$ in $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}[T]$, utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, determinare il polinomio monico $d(T) := \mathrm{MCD}(f(T), g(T)) \in \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}[T]$.

ESERCIZIO 6 (Complementi). **(1)** Siano A, B, C tre insiemi non vuoti. Dimostrare che gli insiemi:

$$(A^B)^C := \{f : C \to A^B \mid f \text{ applicazione}\} \quad \text{e} \quad A^{B \times C} := \{g : B \times C \to A \mid g \text{ applicazione}\},$$

sono equipotenti.

(2) Determinare se l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ha cardinalità del numerabile, del continuo oppure superiore al continuo.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. $x \equiv 8 \pmod{693}$.

ESERCIZIO 2. **(1)** E' un omomorfismo di gruppi: $f(x+8\mathbb{Z}+y+8\mathbb{Z}) = f(x+y+8\mathbb{Z}) = 2(x+y)+8\mathbb{Z} = 2x+2y+8\mathbb{Z} = 2x+8\mathbb{Z}+2y+8\mathbb{Z} = f(x)+f(y)$.

(2) $H := \left\{ \overline{x} \in \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \mid f(f(\overline{x})) = f(\overline{x}) \right\} = \left\{ \overline{x} \in \frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}} \mid \overline{4x} = \overline{2x} \right\} = \{8\mathbb{Z},\ 4+8\mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo (normale) di $\left(\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}, +\right)$.

(3) $H = \mathrm{Ker}(f)$ e quindi i gruppi quoziente sono uguali. Precisamente, utilizzando il Teorema Fondamentale di Omomorfismo, si vede facilmente che $\left(\frac{\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}}{H}, +\right)$ è isomorfo a $\left(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +\right)$.

ESERCIZIO 3. E' essenzialmente svolto nel libro consigliato. In particolare, l'applicazione:

$$g : \boldsymbol{P}(S) \to \boldsymbol{P}(S \setminus T), \quad X \mapsto X \cap (S \setminus T),$$

è un omomorfismo suriettivo di anelli, che ha come nucleo (l'ideale) $\boldsymbol{P}(T)$ di $(\boldsymbol{P}(S), \Delta, \cup)$. Quindi, per il Teorema Fondamentale di Omomorfismo per gli anelli, la risposta esatta è la (iii).

ESERCIZIO 4. E' subito visto che R è un sottoanello commutativo unitario dell'anello di tutte le matrici $\left(\boldsymbol{M}_{2,2}\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right), +, \cdot\ \right)$ dal momento che, svolgendo i calcoli, si vede che:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in R,$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in R,$$

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R,$$

presi comunque $a\,,\ a'\,,\ b\,,\ b' \ \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$.

Inoltre, R non può essere un ideale, perché $I \in R$, ma $R \subsetneq \boldsymbol{M}_{2,2}\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)$ (un sottoanello di un anello unitario che contiene l'unità 1 dell'anello è un ideale soltanto se coincide con tutto l'anello).

R è un campo: l'inversa della matrice non nulla

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in R$$

è la matrice:

$$\begin{pmatrix} \Delta^{-1}a & \Delta^{-1}b \\ -\Delta^{-1}b & \Delta^{-1}a \end{pmatrix} \in R$$

dove $\Delta := a^2 + b^2 \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ è diverso da zero se a o/e b sono diversi da zero in $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ (si noti che Δ^{-1} è l'inverso di Δ in $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$).

Dal momento che R è un campo con $3 \times 3 = 9$ elementi, allora $(\boldsymbol{U}(R), \cdot\ )$ è un gruppo abeliano con 8 elementi generato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{U}(R),$$

che, a calcoli fatti, ha ordine 8.

ESERCIZIO 5. $d(T) := \mathrm{MCD}(f(T), g(T)) = 2 + 2T + T^2 = (3+T)(4+T)$. Si noti anche che le fattorizzazioni in fattori irriducibili dei polinomi dati sono le seguenti:

$f(T) = (2+T)^2(3+T)(4+T)$,
$g(T) = (3+T)(4+T)^2$.

ESERCIZIO 6. **(1)** L'applicazione

$\Phi : (A^B)^C := \{f : C \to A^B \ \mid f \text{ applicazione}\} \longrightarrow A^{B \times C} := \{g : B \times C \to A \ \mid g \text{ applicazione}\}$,

definita come segue:

$$\Phi(f) : B \times C \to A\,, \ \ \Phi(f)(\ (b,c)\ ) := (f(c))(b) \in A\,,$$

si verifica essere una biiezione (definire un'inversa!).

(2) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ha cardinalità del continuo. Basta notare che $\mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ e che, per (1), $\mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}((\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.