TN1

Esercizi per casa, I Prova (20 febbraio 2002)

1) Sia $S := \{x_1, \cdots, x_n\}$ un sistema completo di residui (modulo n) e siano $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$. Verificare che l'insieme $S' = \{ax_1+b, \cdots, ax_n+b\}$ è ancora un sistema completo di residui (modulo n).

2) Siano m ed n interi positivi relativamente primi e siano $S^* := \{x_1, \cdots, x_{\varphi(n)}\}$ e $T^* := \{y_1, \cdots, y_{\varphi(m)}\}$ rispettivamente un sistema ridotto di residui (modulo n) ed un sistema ridotto di residui (modulo m). Verificare che:

$$V^* := \{mx_i + ny_j,\, 1 \leq i \leq \varphi(n), 1 \leq j \leq \varphi(m)\}$$

è un sistema ridotto di residui (modulo mn).

3. Provare che:
1) ogni primo della forma $3n + 1$ è anche della forma $6m + 1$;
2) ogni intero della forma $3n + 2$ possiede un fattore primo della stessa forma.
3) l'unico primo della forma $n^3 - 1$ è 7;
4) l'unico primo tale che $3p + 1$ è un quadrato perfetto è $p = 5$

4. Dimotsrare i seguenti critei di divisibilitá per gli interi. Sia $N \in \mathbb{Z}$ e sia $|N| = a_m 10^m + \cdots + a_1 10 + a_0$ l'espressione decimale di $|N|$. Poniamo $S(N) := \sum_{i=1}^m a_i$ e $A(N) := \sum_{i=1}^m (-1)^i a_i$. Allora:

(1) $2|N \Leftrightarrow 2|a_0$;
(2) $3|N \Leftrightarrow 3|S(N)$;
(3) $4|N \Leftrightarrow 4|a_0 + a_1 10$;
(4) $5|N \Leftrightarrow 5|a_0$;
(5) $9|N \Leftrightarrow 9|S(N)$;
(6) $11|N \Leftrightarrow 11|A(N)$.