Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

Andrea Susa

18 febbraio 2002

1. Provare le seguenti affermazioni:
(a) $n^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, per ogni n intero;
(b) $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$, per ogni n intero;
(c) nessuno intero congruo a 3 (mod 4) può essere somma di due quadrati di numeri interi;
(d) nessuno intero congruo a 7 (mod 8) può essere somma di tre quadrati di numeri interi.

2. Mostrare che, se n è un intero tale che $2 \nmid n$ e $3 \nmid n$, allora $n^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

3. Mostrare che, per ogni intero n, si ha:

$$n(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod 6.$$

4. Siano $a, b, k, p \in \mathbb{Z}$, con $k > 0$ e p primo. Mostrare che:
(a) se $a^2 \equiv b^2 \pmod p$, allora $a \equiv b \pmod p$ oppure $a \equiv -b \pmod p$;
(b) se $a^k \equiv b^k \pmod p$, e $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod p$ e $p \nmid a$, allora $a \equiv b \pmod p$.

5. Per ogni intero $n = 4m + 3$ esiste un primo $p = 4s + 3$ tale che $p \mid n$. In generale, per ogni intero $n = 4m+3$ il numero k dei primi del tipo $p_i = 4s_i+3$ (eventualmente ripetuti) tali che $\prod_{i=1}^{k} p_i \mid n$ è dispari.
Per ogni intero $n = 4m + 1$, se esiste un primo $p = 4s + 3$ tale che $p \mid n$, allora esiste un primo $q = 4t + 3$ tale che $pq \mid n$. In generale, per ogni intero $n = 4m + 1$, se esiste un primo $p = 4s + 3$ che divide n, allora il numero l di tutti i primi $p_i = 4s_i + 3$ (eventualmente ripetuti) tali che $\prod_{i=1}^{l} p_i \mid n$ è pari.