Tutorato di TE1 - Teoria delle Equazioni

Andrea Susa

27 febbraio 2002

(1) Descrivere i seguenti campi e determinare le relazioni che ne intercorrono.
(a) $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.
(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{4+2\sqrt{3}})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
(c) Siano a, b interi non nulli. Determinare condizioni necessarie e sufficienti affinchè $\mathbb{Q}(\sqrt{a+b\sqrt{3}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

(2) Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e $\alpha \in K$. Mostrare che α è algebrico su F se e soltanto se α^n è algebrico su F per ogni $n \geq 2$.

(3) Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$. Dopo aver mostrato che $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, determinare le formule del cambiamento di base da $\{1, \sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab}\}$ a $\{1, (\sqrt{a}+\sqrt{b}), (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2, (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3\}$ di K su $\mathbb{Q}$.

(4) Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e $\alpha \in K$ algebrico di grado dispari su F. Mostrare che $F(\alpha) = F(\alpha^2)$.

(5) Descrivere le seguenti estensioni di $\mathbb{Q}$ e determinarne il grado.
(a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})$.
(b) $\mathbb{Q}(\pi, \sqrt[19]{2})$.
(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + i)$.
(d) $\mathbb{Q}(\xi_5, \sqrt[3]{2})$.

(6) Mostrare che le estensioni in (5.a), (5.c) e (5.d) sono semplici. Posto α un generatore dell'estensione, determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e su un sottocampo intermedio.