Tutorato TE1, 17/4/2002

Esercizio 1. Sia $\omega = e^{2\pi i/5} \in \mathbf{C}$.

(1) Dire se $\omega^5 = 1$;
(2) scrivere un elemento generico del campo $\mathbf{Q}(\omega)$;
(3) determinare $Gal_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}(\omega), \mathbf{Q})$;
(4) calcolare il grado della estensione $\mathbf{Q}(\omega)$ su $\mathbf{Q}$ e scrivere il polinomio minimo di ω;
(5) determinare il campo fisso K del sottogruppo generato dalla identitá e dall'automorfismo α definito da $\alpha(\omega) = \omega^2$ e calcolare il grado di $\mathbf{Q}(w)$ su K;
(6) elencare tutti i possibili sottogruppi di $Gal(\mathbf{Q}(\omega), \mathbf{Q})$
(7) elencare tutti i possibili sottocampi di $\mathbf{Q}(\omega)$ contenenti $\mathbf{Q}$.

Esercizio 2. Studiare il gruppo diedrale D_8 di ordine 8 ed elencare tutti i suoi sottogruppi.

Esercizio 3. Trovare il campo di spezzamento del polinomio $p(x) = x^4 - 2 \in \mathbf{Q}[\mathbf{x}]$. Sia ζ un numero reale positivo tale che $\zeta^4 = 2$.

(1) trovare il grado della estensione $\mathbf{Q}(\zeta, \mathbf{i})$ di $\mathbf{Q}$;
(2) dati $\sigma, \tau \in Gal(\mathbf{Q}(\zeta, \mathbf{i}), \mathbf{Q})$ dfiniti da
$$\sigma(i) = i, \quad \sigma(\zeta) = i\zeta$$
$$\tau(i) = -i, \quad \tau(\zeta) = \zeta,$$
studiare i sottogruppi $G_1 =< \sigma >$ e $G_2 =< \tau >$ del gruppo $Gal(\mathbf{Q}(\zeta, i), \mathbf{Q})$ e determinare i campi fissi;
(3) per ogni intero n che divide 8 trovare un sottocampo K di $\mathbf{Q}(\zeta, i)$ contenente $\mathbf{Q}$ tale che $[\mathbf{Q}(\zeta, i) : K] = n$.