ICA - Soluzioni tutorato IV

Martedì 23 ottobre 2001

1. $L = 7$. Per verificarlo tramite la definizione [1] si può procedere in due modi:

   - risolvere $\forall\epsilon > 0$ la disequazione (*) $\left|\frac{3x+1}{x-1} - 7\right| < \epsilon$ e verificare che (**) $\forall\epsilon > 0$ esiste un intorno I di 2 t.c. ogni x in I è sol. di (*). Nel caso in esame, per semplificare i calcoli, conviene considerare $\epsilon < 4$: in questo modo non si ottengono tutte le soluzioni di (*) quando $\epsilon \geq 4$ ma ugualmente ci si assicura che vale (**). Se $\epsilon < 4$ si ha che ogni $x \in \left(\frac{8+\epsilon}{4+\epsilon}, \frac{8-\epsilon}{4-\epsilon}\right)$ è sol. di (*). Poiché $\frac{8+\epsilon}{4+\epsilon} < \frac{8+2\epsilon}{4+\epsilon} = 2 = \frac{8-2\epsilon}{4-\epsilon} < \frac{8-\epsilon}{4-\epsilon}$ la verifica è conclusa. In particolare $\forall\epsilon > 0$ si può prendere $\delta = \frac{\epsilon}{4+\epsilon}$ (se $\epsilon = 10^{-2}$ si ha $\delta = \frac{1}{401}$)
   - $\left|\frac{3x+1}{x-1} - 7\right| =$ (§) $4\frac{|x-2|}{|x-1|}$. Si deve ora maggiorare (§) in funzione di δ (ancora da determinare): nel caso in esame si considera $\delta \leq \frac{1}{2}$ in modo che $|x-1| \geq \frac{1}{2}$. Perciò si ha:(§) $\leq 4\frac{|x-2|}{1/2} = 8|x-2| < 8\delta$. Se pongo $8\delta = \epsilon$ cioè $\delta = \frac{\epsilon}{8}$ la def. di limite è verificata, sempre che $\delta = \frac{\epsilon}{8} \leq \frac{1}{2}$. Quindi bisogna porre $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{8}, \frac{1}{2}\right\}$. In particolare se $\epsilon = 10^{-2}$ si ha $\delta = \frac{1}{800}$.

2. (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+5}{x^2+1} = 4$

   (b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

   (c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$

   (d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} = \frac{1}{8}$

   (e) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = -1$

[1] Ricordiamo la def. di limite: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ sse $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ t.c. $\forall x \in A$ (dominio di f), con $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha $|f(x) - L| < \epsilon$. In questo caso bisogna dimostrare che $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ (dominio di f), con $0 < |x-2| < \delta$, si ha $|f(x) - 7| < \epsilon$

(f) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2$

(g) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

(h) $\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}, \beta\neq 0$

(i) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Per verificarlo si può o moltiplicare numeratore e denominatore per $1+\cos x$ oppure ricordare che $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$.

(j) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q} = \frac{q}{p}, \ \forall p,q\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Per verificarlo si può moltiplicare l'espressione per $\frac{\sqrt{x^2+p^2}+p}{\sqrt{x^2+q^2}+q}\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p} = 1$.

3. (a) $f(x) = \sin x$. DOMINIO: $\mathbb{R}$, CODOMINIO: $[-1,1]$

   (b) $g(x) = \sqrt{x}$. DOMINIO: $[0,+\infty)$, CODOMINIO $[0,+\infty)$

   (c) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sin\sqrt{x}$. DOMINIO $[0,+\infty)$, CODOMINIO $[-1,1]$

   (d) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\sin x}$. DOMINIO $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi, \pi+2k\pi]$, CODOMINIO $[0,1]$