Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 17/4/2002

7.1 Sia $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ l'n-sfera. Determinare una relazione d'equivalenza ρ su $\mathbf{S}^n$ tale che $\mathbf{S}^n/\rho \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Ovvero dimostrare che $\mathbf{S}^n/\rho$ con la topologia quoziente indotta da ρ è omeomorfo allo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, dove $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è definito come lo spazio quoziente $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}/\sim$, dove $\sim$ è la relazione:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\ t.\,c.\ y_i = \lambda x_i,\ i = 0, ..., n.$$

Verificare inoltre che lo spazio proiettivo reale di n-dimensionale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una varietá topologica n-dimensionale, ovvero verificare che lo spazio $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$:

(i) ha una base numerabile di aperti;

(ii) è uno spazio di Hausdorff (T_2);

(iii) è localmente omeomorfo allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

(Sugg. Per dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2 si utilizzi che $S^n/\rho \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$).

7.2 Si consideri il piano topologico reale $\mathbb{R}^2$ e sia C la seguente curva affine di $\mathbb{R}^2$:

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2(x + 1)\}.$$

(i) Verificare che C con la topologia euclidea indotta non è una varietá topologica.

(ii) Si dimostri che $C - \{(0, 0)\}$ è una varietá topologica 1-dimensionale.

(Sugg. Per il punto (i) far vedere che esiste un punto di C tale che ogni suo intorno aperto non è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}$).

7.3 Sia $T^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ il toro 2-dimensionale (prodotto topologico di $\mathbf{S}^1$ per se stesso 2 volte). Dimostrare che T^2 è una varietá topologica.