Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 27/3/2002

6.1 Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici.

(i) Verificare che se f è aperta o chiusa allora f è un' identificazione.

(ii) Dare un esempio di un' identificazione che non è ne aperta e ne chiusa.

6.2 Si consideri la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$:

$$x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Verificare che $(\mathbb{R}/\rho, \mathcal{T}_e/\rho) \cong ([0, +\infty), \mathcal{T}_e)$ (lo spazio quoziente è omeomorfo alla semiretta euclidea $[0, +\infty)$).

6.3 Sia $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$.
Sia inoltre ρ la segunte relazione su $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y)\rho(x', y') \Leftrightarrow |x| = |x|' \text{ e } |y| = |y'|.$$

Dimostrare che $(T, \mathcal{T}_e|_T) \cong (\mathbb{R}^2/\rho, \mathcal{T}_e/\rho)$, dove T ha la topologia euclidea di sottospazio e su $\mathbb{R}^2/\rho$ c' è la topologia quoziente.

6.4 In $(\mathbb{R}, i_s)$ sia definita la seguente relazione di equivalenza:

$$x\rho y \Leftrightarrow y = \pm x.$$

(i) Determinare la topologia quoziente i_s/ρ.

(ii) Verificare che $(\mathbb{R}/\rho, i_s/\rho)$ è omeomorfo alla semiretta chiusa $[0, +\infty)$ con la topologia banale.

6.5 Dimostrare che l'essere T_2 è una proprietá topologica per uno spazio X.

6.6 Dimostrare che se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio metrizzabile allora è T_2.

6.7 Determinare quali tra i seguenti spazi sono T_2:
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$; $(\mathbb{R}, i_s)$; $(\mathbb{R}, j_s)$; $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$.

6.8 Dimostrare che ogni sottospazio di uno spazio T_2 è T_2 e che ogni prodotto topologico di spazi T_2 è T_2.

6.9 Siano $f, g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ due applicazioni continue tra gli stessi spazi topologici.
Sia $\Delta := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Dimostrare che se $(Y, \mathcal{T}_Y)$ è uno spazio T_2 allora Δ è un chiuso in $(X, \mathcal{T}_X)$.