Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 13/3/2002

4.1 Consideriamo lo spazio $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_e)$ dove $\mathcal{T}_e$ è la topologia su $\mathbb{C}$ indotta dalla seguente metrica su $\mathbb{C}$:

$$d(a, b) = |a - b|.$$

Sia S il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

$$S := \{a \in \mathbb{C} : |a| = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Determinare $\mathrm{Int}(S)$, $\mathrm{Est}(S)$, $\mathrm{Fr}(S)$, $\overline{S}$, $D(S)$ e S^*(l'insieme dei punti isolati di S).

4.2 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico saparabile. Siano $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}''$ due topologie su X tali che $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}''$.

(i) Dimostrare che $(X, \mathcal{T}')$ è separabile.
(ii) Verificare con un esempio che $(X, \mathcal{T}'')$ puó non essere saparabile.

4.3 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Verificare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) $\forall\, U \in \mathcal{T}$ con $U \neq \emptyset$, $\overline{U} = X$;
(ii) $\forall\, U, V \in \mathcal{T}$ con $U, V \neq \emptyset$, $U \cap V \neq \emptyset$;
(iii) $\forall\, F, G$ chiusi in $(X, \mathcal{T})$ tali che $X = F \cup G$, allora $F = X$ oppure $G = X$

4.4 Dato X insieme non vuoto. Siano $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ tue topologie su X con $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$. Sia $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una successione in X convergente ad un unico limite x in $(X, \mathcal{T})$.

(i) Verificare che se $\{x_n\}_{n \geq 1}$ è convergente in $(X, \mathcal{T}')$, allora converge ad x.
(ii) Determinare un esempio di successione convergente ad un unico limite in $(X, \mathcal{T})$ e non convergente in $(X, \mathcal{T}')$.

4.5 Sia $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una successione in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ formata da tutti elementi distinti tra loro.
Verificare che $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge ad ogni $a \in \mathbb{R}$. Dedurne che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ non è metrizzabile.

4.6 Sia $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione cosí definita: $q(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Siano $\mathcal{T}_e, i_s, j_s$ le topologie su $\mathbb{R}$ definite negli esercizi precedenti. Verificare che:

(i) $q : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ è continua;
(ii) $q : (\mathbb{R}, \imath_s) \to (\mathbb{R}, i_s)$ non è continua;
(iii) $q : (\mathbb{R}, \jmath_s) \to (\mathbb{R}, j_s)$ non è continua.

4.7 Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ la retta reale dotata della topologia cofinita.
Determinare un'applicazione $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ verificante le seguenti condizioni:

(i) f è chiusa, non aperta e non continua;
(ii) f è aperta, non chiusa e non continua;
(iii) f è continua, non chiusa e non aperta.

4.8 Si considerino le seguenti topologie sulla retta $\mathbb{R}$: $i_s, i_d, \mathcal{T}_e, j_s, j_d$, dove $i_d = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}$.

(i) Verificare che $(\mathbb{R}, i_s) \cong (\mathbb{R}, i_d)$ e $(\mathbb{R}, j_s) \cong (\mathbb{R}, j_d)$.
(ii) Verificare che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \not\cong (\mathbb{R}, i_s)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \not\cong (\mathbb{R}, j_s)$ e $(\mathbb{R}, i_s) \not\cong (\mathbb{R}, j_s)$.