Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 8/3/2002

3.1 Sia X un insieme. Sia $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{con}}$ la seguente famiglia di parti di X:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{con}} := \{C \subset X : |C| \leq |\mathbb{N}|\} \cup \{X\}.$$

Verificare che esiste una topologia $\mathcal{T}_{con}$ su X che ha $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_{con}}$ come famiglia di chiusi.
Confrontare inoltre la topologia $\mathcal{T}_{con}$ con la topologia $\mathcal{T}_{cof}$ (topologia cofinita) su X.

3.2 Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ la retta euclidea. Sia $\mathcal{U}_p$ la famiglia di tutti gli intorni di un punto p di $\mathbb{R}$.
Determinare una sottofamiglia numerabile di intorni di p, $\mathcal{V}_p \subset \mathcal{U}_p$, verifacante la seguente proprietá:

$$\forall\, U_p \in \mathcal{U}_p,\ \exists\, V_p \in \mathcal{V}_p \textit{ tale che } V_p \subset U_p.$$

3.3 Sia $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$. Determinare $\text{Int}(S)$, $\text{Est}(S)$, $\text{Fr}(S)$, $\overline{S}$, $D(S)$ rispetto alla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

3.4 Sia $S := \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Determinare la chiusura $\overline{S}$ di S rispetto alle seguenti topologie di $\mathbb{R}$: i_s, $\mathcal{T}_e$, j_s, j_d. (Le topologie i_s, $\mathcal{T}_e$, j_d, j_s di $\mathbb{R}$ sono state gia' definite rispettivamente negli esercizi **2.8**, **1.8**, **1.8** e **2.7**).

3.5 Sia $A = (a, b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$. Determinare $\text{Int}(A)$, $\text{Est}(A)$, $\text{Fr}(A)$, $\overline{A}$, $D(A)$ rispetto alla topologia j_d di $\mathbb{R}$.

3.6 Sia X un insieme e sia

$$\mathcal{T}_{cof} := \{A \subset X : X - A \textit{ è finito}\} \cup \{\emptyset\}$$

la topologia cofinita su X. Sia $S \subset X$ tale che sia X che $X - S$ sono infiniti.
Determinare: $\text{Int}(S)$, $\text{Est}(S)$, $\text{Fr}(S)$, $\overline{S}$, $D(S)$.

3.7 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e siano A, B sottoinsiemi di X. Verificare:

(i) $\text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$, $\quad \text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$;
(ii) $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$, $\quad \text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$;
(iii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(iv) $\text{D}(A \cap B) \subset \text{D}(A) \cap \text{D}(B)$, $\quad \text{D}(A \cup B) = \text{D}(A) \cup \text{D}(B)$.

Trovare esempi in cui le inclusioni precedenti sono strette.