V Tutorato di GE2 A.A. 2001-2002

26 novembre 2001

1. In $\mathbb{R}^2$ siano $\mathbf{e_1}$ un vettore e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare tale che $\|\mathbf{e_1}\| = 1$. Sia $\mathbf{e_2}$ un versore (vettore di norma 1) ortogonale ad $\mathbf{e_1}$.

   Sia inoltre π l'applicazione lineare che manda un vettore $\mathbf{v}$ nella sua proiezione su $\mathbf{e_1}$ (se $\mathbf{v} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2}$, $\pi(\mathbf{v}) = a_1\mathbf{e_1}$).

   (a) Dimostrare che l'applicazione lineare

   $$\begin{array}{rcl} \phi : V & \longrightarrow & V \\ \mathbf{v} & \longmapsto & \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{v}\rangle \mathbf{e_1} \end{array}$$

   coincide con π.

   (b) Dedurre un metodo per calcolare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto ad una base ortonormale utilizzando il prodotto scalare.

   (c) Dire (senza dimostrazione) come si può estendere tale metodo ad un qualunque spazio vettoriale di dimensione finita (su cui, cioè, si possa parlare di coordinate) dotato di un prodotto scalare e di una base ortonormale

   (d) Tentare di generalizzare ad una base ortogonale *(Suggerimento: sostituire ad ogni vettore della base $\mathbf{e_i}$ il prodotto $||\mathbf{e_i}||\widehat{\mathbf{e_i}}$ e ricordare che $\|\mathbf{e_i}\|^2 = \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}\rangle$).*

   (e) Trovare le analogie con il metodo appena trovato e l'algoritmo di Gram-Shmidt

2. Sia $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazion e lineare definita, rispetto alle basi canoniche, dalla seguente matrice:

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Si calcoli una base dello sottospazio Imf, (immagine di f), utilizzando il procedimento di Gram-Shmidt.

   (Suggerimento: fissare su $\mathbb{R}^4$ un prodotto scalare, (ad esempio quello standard), ed applicare Gram-Schmidt al piu' semplice sistema di generatori di Imf che si ha a disposizione).

3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 4 in una indeterminata T. Si consideri la funzione $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ cosi' definita:

$$\phi(p,q) = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$$

Si provi che la funzione ϕ appena definita e' effettivamente una forma bilineare simmetrica. ϕ e' definita positiva: per quale motivo?.

Posto $p = 1$ si determinino i polinomi q che sono ortogonali a p.

4. Sia B la matrice simmetrica associata ad una forma bilineare simmetrica $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ rispetto ad una base

$b = \{\mathbf{b_1} \dots \mathbf{b_n}\}$. Si provi che, in ognuno dei seguenti casi, ϕ non e' un prodotto scalare:

(a) Se $\det B = 0$

(b) Se il prodotto dei termini sulla diagonale principale e' negativo o nullo

(c) Se $m_{11}m_{22} - m_{12}^2 = 0$.