20/12/01 Prova. Struttura non definitiva

1) In un piano euclideo L con riferimento cartesiano $O\overline{i}\overline{j}$ si consideri la conica Γ di equazione

$$X^2 - 2Y^2 - XY + 2X - 4Y + 1 = 0.$$

Si scriva l'equazione di Γ in forma canonica e si dica di che tipo di conica si tratta.

2) Sia $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore simmetrico cosi' definito:

$$\phi(\overline{i}) = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}, \quad \phi(\overline{j}) = 2\overline{i}, \quad \phi(\overline{k}) = \overline{i} + \overline{k},$$

dove $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ e' una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard. Si determini una base ortonormale
di autovettori di ϕ.

3) Sia $q : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita, rispetto alla base canonica, dal polinomio

$$q(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^2 + X_1X_2 + X_2X_3 - 3X_4^2.$$

Si determini rango e segnatura di q. Sia b la forma bilineare polare di q: si determinino tutti i vettori isotropi di b che sono ortogonali ai vettori $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbf{R}^4$.

4) Sia L un piano affine con riferimento $O\overline{e}_1\overline{e}_2$. Si determinino le equazioni di un'affinita'

$$f : L \to L$$

tale che $f(\Gamma_1) = \Gamma_2$, dove Γ_1 e' l'ellisse di equazione $X^2/16 + X^2/9 = 1$ e Γ_2 e' la circonferenza di equazione $(X-1)^2 + (Y-1)^2 = 9$, (circonferenza di centro $(1,1)$).

5)Sia $\mathbf{P}^2$ un piano proiettivo con riferimento $\overline{e}_0\overline{e}_1\overline{e}_2$. Si consideri la famiglia di coniche $\overline{\Gamma}_{u,t}$ di equazione

$$u(X_0^2 + X_1^2) + t(X_0X_1 + X_0X_2 + X_1X_2) = 0.$$

Si determini la conica della famiglia che contiene il punto 'all'infinito' $(0:1:2)$. Si scriva l'equazione affine di tale conica in $L - \{X_0 = 0\}$ ponendo $X = X_1/X_0$, $Y = X_2/X_0$. Si scriva la forma canonica affine di tale conica.

6) In $\mathbf{R}^4$ con il prodotto scalare standard si considerino i vettori $\overline{v}_1 = (O,O,1,O), \overline{v}_2 = (1,1,1,1), \overline{v}_3 = (2,1,0,1), \overline{v}_4 = (t,0,t,o)$. Si determini il valore di t per il quale il procedimento di Gram-Schmid applicato a $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ produce almeno un vettore nullo. Si applichi il procedimento in questo caso.