

## DIDATTICA GUIDATA GE2: PRODOTTI SCALARI II

**Esercizio 1.** Su  $\mathbb{R}^3$  sia dato il prodotto scalare def. positivo

$$\langle x, y \rangle = \langle x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_3y_3 \rangle$$

$x, y \in \mathbb{R}^3$ . Trovare una base ortonormale rispetto a questo prodotto del sottospazio  $V \subset \mathbb{R}^3$ ,  $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ ,  $v_1 = (1, -1, 1)$  e  $v_2 = (3, 1, 1)$ . Completare questa base ad una base di  $\mathbb{R}^3$ .

(Suggerimento. Applicare ripetutamente il procedimento di ortogonalizzazione a  $\{v_1, v_2\}$ .)

**Esercizio 2.** Siano  $x_0 = (1 + \sqrt{2})e_1 + e_3$ ,  $y_0 = -e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^3$ . Calcolare la lunghezza di  $x_0$  e l'angolo fra  $x_0$  ed  $y_0$  rispetto al prodotto scalare dell'esercizio precedente.

**Esercizio 3.** Trovare un prodotto scalare definito positivo su  $\mathbb{R}^4$  rispetto al quale la base  $b = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$  sia ortonormale.

(Suggerimento. Sia  $B$  la matrice del cambiamento di base da quella canonica alla base  $b$ . Sia  $S$  la matrice che rappresenta il prodotto scalare cercato rispetto alla base canonica. Dimostrare che  $I_4 = B^t S B$ . Ricavare  $S$  da questa. )