DIDATTICA GUIDATA GE2: PRODOTTI SCALARI E FORME QUADRATICHE

<u>Esercizio</u> 1. *Su $\mathbf{R}^3$ si consideri la forma quadratica*

$$q(\overline{x}) = -X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 + 2X_1X_3 + 8^{\frac{1}{2}}X_2X_3$$

(dove $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ é la base canonica e $\overline{x} = X_1\overline{e}_1 + X_2\overline{e}_2 + X_3\overline{e}_3$).

(i) Si determini una base diagonalizzante per q contenente il vettore $\overline{e}_1 + \overline{e}_3$.

(ii) Si determini una base $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare standard ed inoltre diagonalizzante per q.

(iii) Si determini un sottospazio vettoriale di dimensione due $W \subset \mathbf{R}^3$ tale che q/W sia definita negativa e si dimostri che non esistono sottospazi di dimensione due sui quali q é definita positiva.

<u>Soluzione</u>. (i) Base diagonalizzante contenente $\overline{e}_1 + \overline{e}_3$:

$$\overline{e}_1 + \overline{e}_3, \quad \overline{e}_1, \quad 3\overline{e}_2 + 8^{12}\overline{e}_3$$

(ii)

Si calcola la matrice di q rispetto alla base canonica e si determinano gli autovalori. Questi sono:

$$-1, \quad 2, \quad -2$$

Tre corrispondenti autovettori di lunghezza uno costituiscono una base ortonormale diagonalizzante per q.

(iii) Su $W =< \overline{e}_1, \overline{e}_2 >$ q é negativa definita. Sia V un sottospazio di dimensione due sul quale q sia definita positiva. Per la formula di Grassmann $\dim(W \cap V) \geq 1$. Ma allora esisterebbe un vettore non nullo $\overline{x}$ in $W \cap V$ e per $\overline{x}$ si avrebbe $q(\overline{x} > 0$, $q(\overline{x}) < 0$: assurdo.

<u>Esercizio</u> 2. *Sia $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ una base ortonormale per $\mathbf{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, (ad esempio la base canonica).*

(i)Si determinino, scrivendone la matrice associata rispetto alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, tutte le forme bilineari simmetriche

$$\beta : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

soddisfacenti alle due condizioni seguenti:

- i vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono isotropi rispetto a β,

- i vettori $(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $(\mathbf{i} + \mathbf{k})$, $(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ sono a due a due ortogonali rispetto a β.

(ii) Tra le forme bilineari simmetriche precedenti se ne scelga una non degenere e la si indichi con β_0. Si risponda, fornendo motivazioni adeguate, alle domande seguenti:

- Esiste per β_0 una base ortonormale diagonalizzante contenente almeno uno dei tre vettori

$$2^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}), 2^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k}), 2^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{j} + \mathbf{k})?$$

- Esiste per β_0 una base ortonormale diagonalizzante?

<u>Soluzione</u>. Sia (b_{lm}) con $l, m = 1, 2, 3$ la matrice simmetrica associata a β (rispetto alla base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$). La condizione che $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ siano vettori isotropi di β equivale a

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0.$$

Le altre condizioni richieste sono equivalenti alla condizione

$$b_{12} + b_{13} + b_{23} = 0$$

Ponendo per comoditá di scrittura $u = b_{12} = b_{21}$, $v = b_{13} = b_{31}$, $t = b_{23} = b_{32}$ otteniamo che la matrice associata a una forma β é del tipo

$$B_{u,v} = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ u & 0 & -u-v \\ v & -u-v & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Il determinante della precedente matrice é $2uv(-u-v)$, quindi per fissare una forma β non degenere basta fissare u, v non nulli e tali che $u + v \neq 0$. Supponiamo di avere fissato tali valori e consideriamo uno dei tre vettori

$$2^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}), \quad 2^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{j}+\mathbf{k}), \quad 2^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k}),$$

ad esempio il primo. La terna delle componenti di questo vettore rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ é $2^{-\frac{1}{2}}(1, 1, 0)$. Affinché un vettore appartenga a una base ortonormale diagonalizzante per β la terna delle sue componenti deve essere un autovettore della corrispondente matrice $B_{u,v}$, cioé si deve avere

$$(1, 1, 0)B_{u,v} = \lambda(1, 1, 0),$$

per un dato autovalore λ di $B_{u,v}$. Poiché

$$(1, 1, 0)B_{u,v} = (u, u, -u)$$

si deve avere

$$(u, u, -u) = \lambda(1, 1, 0).$$

Ció é possibile solo se $u = 0$ e quindi β é degenere. Lo stesso ragionamento vale per gli altri due vettori. Conclusione: nessuno dei tre vettori puó far parte di una base ortonormale diagonalizzante di β (non degenere).
(ii) Sí, per il teorema spettrale.