TUTORATO GE1

Venerdì 5 aprile 2002

1. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\Re$, di grado ≤ 2 nelle due indeterminate x, y. Assegnati i quattro polinomi

$$p_1 = 1 + x, \quad p_2 = 1 - xy, \quad p_3 = x - y, \quad p_4 = x + y^2$$

   e indicato con W il sottospazio da essi generato:

   (a) Verificare che $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ è una base di W.

   (b) Completare $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ sino ad ottenere una base di V.

   (c) Verificare che il polinomio $p = 3x - 2y + xy$ appartiene a W e calcolarne le coordinate in base $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

2. E' assegnato il sistema lineare omogeneo a coefficienti in $\Re$ dipendente da due parametri reali a, b:

$$\begin{cases} aX_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + aX_2 = 0 \\ bX_3 + X_4 = 0 \\ X_3 + bX_4 = 0 \end{cases}$$

   (a) Discutere, al variare di $(a, b) \in \Re^2$ la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare assegnato.

   (b) Risolvere il sistema lineare omogeneo assegnato limitatamente alle coppie $(a, b) \in \Re^2$ per cui risulta che la dimensione dello spazio delle soluzioni sia uguale a 2. In questo caso trovare una base di tale spazio.

3. Siano U_1, U_2, U_3 tre sottospazi vettoriali di dimensione finita di un K-spazio vettoriale V.

   (a) Scrivere la formula di Grassmann relativamente ai due sottospazi $U_1 + U_2$ e U_3.

(b) Verificare che

$$dim[(U_1+U_2)\cap U_3]+dim(U_1\cap U_2) = dim[U_1\cap(U_2+U_3)]+dim(U_2\cap U_3).$$

(c) Posto $dim(V) = 3$, determinare tre dei suoi sottospazi U_1, U_2, U_3 tali che

$$dim[(U_1 + U_2) \cap U_3] < dim[U_1 \cap (U_2 + U_3)].$$

4. Invertire, se possibile, le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Scrivere la definizione di dipendenza e di indipendenza lineare di n vettori di uno spazio vettoriale V. Trovare un controesempio alla seguente affermazione (falsa):

   $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente dipendenti $\iff$ ciascuno di essi è combinazione lineare degli altri due.