Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/02
Geometria 1
Lavoro Guidato - Dr. Valerio Talamanca
giovedì 18 aprile 2002

1. *Determinare in funzione dei parametri reale $a, b \in \mathbb{R}$ il rango delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & b \\ b & a & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a & 0 & b \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a-1 & ba & a-2 \\ 0 & b-2 & b+3 \\ b+3 & a & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Determinare in funzione del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ la compatibilità dei seguenti sistemi ed in caso siano compatibili determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.*

$$\begin{cases} aX_1 + X_2 + 3X_4 = 1 \\ (3-a)X_2 + X_3 + aX_4 = -1 \\ aX_1 + 3X_3 + a4X_4 = 2 \\ 3X_1 + 3X_3 aX_4 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} aX_1 + aX_2 = 2 \\ X_2 + aX_3 = 0 \\ aX_1 + aX_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ -X_1 - aX_2 + 2aX_3 = -\dfrac{1}{3} \\ aX_1 + aX_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

3. *Sia $M_{n,r}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ che hanno rango $r \leq n$. Determinare per quali r si ha che $M_{n,r}(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$.*

4. *Si considerino le seguenti permutazioni di S_9*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 5 & 4 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 7 & 8 & 5 & 4 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 8 & 6 & 7 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ognuna di esse si calcolino: La permutazione inversa, la decomposizione in cicli disgiunti, due decomposizioni diverse come prodotto di traspozioni, e la parità.

5. *Sia $\sigma \in S_n$ una permutazione. Si definisca l' ordine di σ (in simboli* $\operatorname{ord}(\sigma)$*) come il più piccolo intero positivo n tale che $\sigma^n = 1$.*
a) Mostrare che, per ogni $\sigma \in S_n$, $\operatorname{ord}(\sigma) \leq n! = |S_n|$.
b) Mostrare che se σ è un k-ciclo allora $\operatorname{ord}(\sigma) = k$.
c) Mostrare che se $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ è la decomposizione di σ in cicli disgiunti, allora $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{mcm}(\operatorname{ord}(\tau_1), \ldots, \operatorname{ord}(\tau_k))$.