Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/02
Geometria 1
Lavoro Guidato - Dr. Valerio Talamanca
giovedi 11 aprile 2002

1. *Determinare per quali valori del parametro reale* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i tre vettori di* $\mathbb{R}^3$*:* $u = (0, 1, 3)$, $v = (1, 0, \lambda)$, $w = (1, \lambda, 1)$, *costituiscono una base di* $\mathbb{R}$*.*

2.

(1) *Si determini per quali valori del parametro reale* k *la matrice*

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k+1 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

(2) *Invertire la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *Si risolva il seguente sistema lineare*

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 + X_4 = -1 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 2 \\ 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 6X_4 = 4 \end{cases}$$

4. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^4$

$$U = < (1,\ 2\,0,\ -1),\ (0,\ 1,\ 0,\ 2),\ (0,\ 0,\ 3,\ 2),\ (1,\ 3,\ 3,\ 3) >; W = < (1,\ 0,\ 1,\ 0), (1,\ 1,\ 1,\ 0)$$

Determinare le loro dimensioni e trovare una base di $U + W$ *costituita da vettori scelti fra quelli dati. Determinare inoltre se la somma è diretta.*

5. *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione* $2n$ *e siano* $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *e* $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ *due insiemi di vettori independenti. Dire (giustificando) quali delle seguenti affermazioni sono vere*

(1) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ *è un insieme di vettori linearmente independenti se e soltanto se* $< \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n > \cap < \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n > = \{0\}$.

(2) *Se* $v_1 \in < \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n >$ *allora* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ *è un insieme di vettori linearmente independenti.*

(3) *Se* $v_1 \in < \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n >$ *e* $\mathbf{w}_1 \in \{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ *allora* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ *è un insieme di vettori linearmente independenti.*