UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2001-2002

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.
(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore ed diagonalizzabilità di F;
(b) Si enunci il risultato che caratterizza la diagonalizzabilità di F (senza usare le basi);
(c) si dimostri tale risultato.

2. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine e si considerino le tre rette di equazioni parametriche seguenti:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \mathcal{R}_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3s \end{cases}, \mathcal{R}_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = u \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Esiste un piano che contiene tutte e tre le rette?
(b) Determinare tutte le terne di punti $P_1 \in \mathcal{R}_1, P_2 \in \mathcal{R}_2, P_3 \in \mathcal{R}_3$ tali che P_1, P_2 e P_3 sono allineati.

3. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita e siano $F_1, F_2 : V \to W$ due applicazioni lineari tali che $N(F_1) = N(F_2), ImF_2 \subseteq ImF_1$.

(a) Dimostrare che $ImF_2 = ImF_1$ e far vedere con un esempio che non è detto che $F_1 = F_2$;

(b) se $dimImF_2 = 1$ segue necessariamente che $F_1 = F_2$?

(c) Data una F_2 che soddisfa (b) trovare tutte le possibili F_1.

4. Siano $v_1 = (0, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $N(F) \supseteq < v_1, v_2 >, F(E_4) = E_4, F(E_1 + E_4) = E_1 + cE_3$ per qualche numero reale c, dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di c per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia A uno spazio affine di dimensione $n \geq 1$ su uno spazio vettoriale V e siano H un iperpiano di A e S un sottospazio di A di dimensione positiva. Si dimostri che o H è parallelo ad S o H interseca S.