UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2001-2002

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore ed diagonalizzabilità di F;

(b) Si enunci il risultato che caratterizza la diagonalizzabilità di F (senza usare le basi);

(c) si dimostri tale risultato.

2. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine e si considerino le tre rette di equazioni parametriche seguenti:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \mathcal{R}_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3s \end{cases}, \mathcal{R}_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = u \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Esiste un piano che contiene tutte e tre le rette?

(b) Determinare tutte le terne di punti $P_1 \in \mathcal{R}_1, P_2 \in \mathcal{R}_2, P_3 \in \mathcal{R}_3$ tali che P_1, P_2 e P_3 sono allineati.

3. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita e siano $F_1, F_2 : V \to W$ due applicazioni lineari tali che $N(F_1) = N(F_2), ImF_2 \subseteq ImF_1$.

(a) Dimostrare che $ImF_2 = ImF_1$ e far vedere con un esempio che non è detto che $F_1 = F_2$;

(b) se $dimImF_2 = 1$ segue necessariamente che $F_1 = F_2$?

(c) Data una F_2 che soddisfa (b) trovare tutte le possibili F_1.

4. Siano $v_1 = (0, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ e sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $N(F) \supseteq < v_1, v_2 >, F(E_4) = E_4, F(E_1 + E_4) = E_1 + cE_3$ per qualche numero reale c, dove E_1, E_2, E_3, E_4 è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di c per i quali F è diagonalizzabile.

5. Sia A uno spazio affine di dimensione $n \geq 1$ su uno spazio vettoriale V e siano H un iperpiano di A e S un sottospazio di A di dimensione positiva. Si dimostri che o H è parallelo ad S o H interseca S.

SOLUZIONI

1. (a) [Sernesi] Definizioni 13.4 e 13.3; (b) e (c) Teorema 13.13. ■

2. Si osservi che le rette $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ sono parallele e distinte, dunque contenute in un'unico piano. Dalle loro equazioni si vede subito che tale piano è necessariamente il piano p di equazione $Y = 0$. Ora $\mathcal{R}_3 \cap p = (2,0,0) = P_3$. Quindi le tre rette non sono contenute in un piano. Inoltre, per come sono poste le rette, le terne di punti $P_1 \in \mathcal{R}_1, P_2 \in \mathcal{R}_2, P_3 \in \mathcal{R}_3$ tali che P_1, P_2 e P_3 sono allineati si ottengono scegliendo un qualsiasi punto $P_1(0,0,t) \in \mathcal{R}_1$ e intersecando la retta $\overline{P_1P_3}$ con la retta $\mathcal{R}_2$. Ora $\overrightarrow{P_1P_3} = (2,0,-t)$ e dunque la retta $\overline{P_1P_3}$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 2v \\ y = 0 \\ z = -tv \end{cases}$$

dove v è il parametro. Intersecando con $\mathcal{R}_2$ si ottiene

$$\begin{cases} 1 = 2 + 2v \\ 3s = -tv \end{cases}$$

e quindi $v = -\frac{1}{2}, s = -\frac{tv}{3} = \frac{t}{6}$, e le terne sono, al variare di t,

$$P_1(0,0,t),\ P_2(1,0,\frac{t}{2}),\ P_3(2,0,0). \blacksquare$$

3. (a) per il Teorema 11.6 del [Sernesi] si ha:

$$dimImF_2 = dimV - dimN(F_1) = dimV - dimN(F_2) = dimImF_2$$

e, visto che $ImF_2 \subseteq ImF_1$, ne segue che $ImF_2 = ImF_1$. Sia ora $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $N(F_1)$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ un suo completamento ad una base di V. Supponiamo $n > k$. Sappiamo che $F_1(v_i) = F_2(v_i) = 0, i = 1, \dots, k$. Allora ponendo $F_1(v_i) = F_2(v_i)$ per $i = k+1, \dots, n-1, F_1(v_n) = 2F_2(v_n)$ si ha certamente che $N(F_1) = N(F_2), ImF_1 = ImF_2$, ma $F_1 \neq F_2$. Per un esempio esplicito, che va bene anche per (b), si prenda $V = W = \mathbb{R}, F_1 = id_V, F_2 = 2id_V$. Dunque la risposta a (b) è no. (c) Visto che $dimImF_2 = 1$, presa una base di V come in (a) si ha $k = n-1$ e quindi $ImF_2 = ImF_1 =< F_2(v_n) >$, dunque esiste un numero reale $c \neq 0$ tale che $F_1(v_n) = cF_2(v_n)$. Questo, insieme a $F_1(v_i) = 0, i = 1, \dots, n-1$ determina tutte le possibili F_1 per il Teorema 11.3 del [Sernesi].
■

4. (a) Si ha che $F(E_1) = E_1 + cE_3 - E_4$. Ora i quattro vettori v_1, v_2, E_4, E_1 sono linearmente indipendenti dato che

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

dunque scegliamo come base $e = \{v_1, v_2, E_4, E_1\}$. Per scrivere la matrice di F in tale base occorre esprimere le immagini di F in tale base. Sappiamo che $F(v_1) = F(v_2) = 0, F(E_4) = E_4$, mentre si calcola facilmente che $F(E_1) = 0v_1 + cv_2 - E_4 + (1-c)E_1$ e quindi la matrice di F nella base e è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-c \end{pmatrix}.$$

(b) e (c) Il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T & 0 & c \\ 0 & 0 & 1-T & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-c-T \end{vmatrix} = T^2(1-T)(1-c-T)$$

da cui gli autovalori sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1-c$. Osserviamo intanto che, per quanto sappiamo, $v_1, v_2 \in V_0(F) = N(F), dimV_0(F) = dimN(F) \geq 2$ (in quanto v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti), $E_4 \in V_1(F)$ (dato che $F(E_4) = E_4$).

Studiamo ora $V_{1-c}(F)$: gli autovettori sono $v = xv_1 + yv_2 + zE_4 + wE_1$ dove x, y, z, w sono soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} -1+c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+c & 0 & c \\ 0 & 0 & c & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} (c-1)x = 0 \\ (c-1)y + cw = 0 \\ cz - w = 0 \end{cases}.$$

Da questo troviamo gli autovettori associati a $\lambda_3 = 1-c$. Se $c \neq 1$, posto $z = 1$ si trova $x = 0, y = -\frac{c^2}{c-1}, w = c$ e quindi il vettore $u(0, -\frac{c^2}{c-1}, 1, c)$ (nella base data). Si noti che questo vettore coincide con E_4 se $c = 0$. Se $c = 1$ si trova $z = w = 0$ e quindi solo due vettori indipendenti $v(1,0,0,0) = v_1, v(0,1,0,0) = v_2$ (nella base data).

CASO 1: $c \neq 0, 1$.

Dato che la molteplicità algebrica non può superare quella geometrica, ne segue che basi per gli autospazi sono

$\{v_1, v_2\}$ per $V_0(F)$,

$\{E_4\}$ per $V_1(F)$ e

$\{u\}$ per $V_{1-c}(F)$.

In questo caso F è diagonalizzabile per il Teorema 13.13 del [Sernesi].

CASO 2: $c = 0$.

Dato che la molteplicità algebrica non può superare quella geometrica, e, per quanto detto sopra, le basi sono

$\{v_1, v_2\}$ per $V_0(F)$,

$\{E_4\}$ per $V_1(F)$.

In questo caso F non è diagonalizzabile per il Teorema 13.13 del [Sernesi].

CASO 3: $c = 1$.

Per quanto detto sopra le basi sono

$\{v_1, v_2\}$ per $V_0(F)$,

$\{E_4\}$ per $V_1(F)$.

In questo caso F non è diagonalizzabile per il Teorema 13.13 del [Sernesi]. ■

5. Siano W la giacitura di H e U la giacitura di S. Dato che $dimW = n - 1$ e $dimU \geq 1$ si ha che o $U \not\subset W$ ed allora $U + W = V$ e dunque $H \cap S \neq \emptyset$ per la Proposizione 8.9 del Sernesi; oppure $U \subset W$ e dunque $H||S$.

Altra dimostrazione: sia $dimS = s$ e siano

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n = b_i, i = 1, \dots n - s$$

le equazioni di S in un dato riferimento affine; in particolare si ha $r(a_{ij}) = n - s$. Sia ora

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = b$$

l'equazione di H. L'intersezione $H \cap S$ è data dal sistema

$$\begin{cases} a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n = b_i, i = 1, \dots n - s \\ a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = b \end{cases}$$

da cui o $H \cap S \neq \emptyset$, oppure il sistema è incompatibile, e quindi, per il Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli, necessariamente il rango della matrice dei coefficienti deve essere $n-s$, e dunque l'ultima riga $(a_1 a_2 ... a_n)$ è combinazione lineare delle precedenti. Da questo segue che le soluzioni del sistema omogeneo

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{in}X_n = 0, i = 1, \dots n-s$$

sono anche soluzioni di

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n = 0$$

cioè la giacitura di S è contenuta nella giacitura di H. ∎