UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2001-2002

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2001-2002

SOLUZIONI

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di V e di W;

(b) si dimostri tale risultato.

Soluzione (a) e (b) [Sernesi, Corollario 4.17].

2. Siano a e b due numeri reali. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + ax_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ bx_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni.

Soluzione Per semplicità eseguiamo operazioni elementari sulle righe della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & a & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ b & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con scambi di righe otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & a & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ b & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_3 \to R_3 - 2R_1$ e $R_4 \to R_4 - bR_1$ danno la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1-b & -b \end{pmatrix}$$

e scambiando terza e quarta riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-b & -b \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_4 \to R_4 + R_2$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-b & -b \\ 0 & 0 & -2 & a-2 & -3 \end{pmatrix}$$

e con $R_4 \to R_4 + 2R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-b & -b \\ 0 & 0 & 0 & a-2b-4 & -3-2b \end{pmatrix}.$$

Ora se $a - 2b - 4 \neq 0$ allora il sistema è a gradini e sostituendo via via si calcola l'unica soluzione

$$x_1 = \frac{a-1}{a-2b-4},\ x_2 = \frac{3a-ab-3b-9}{a-2b-4},\ x_3 = -\frac{ab+b+3}{a-2b-4},\ x_4 = \frac{-3-2b}{a-2b-4}.$$

Invece se $a = 2b + 4$ l'ultima riga implica che il sistema può essere compatibile solo se $-3 - 2b = 0$, cioè $b = -\frac{3}{2}, a = 1$. In quest'ultimo caso il sistema restante è a gradini e ponendo $x_4 = t$ si ottiene

$$x_1 = 1 - t,\ x_2 = \frac{9-5t}{2},\ x_3 = \frac{3-t}{2},\ x_4 = t. \blacksquare$$

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

Soluzione Come da [Sernesi, Osservazione 3.2.8] consideriamo la matrice

$$(A \quad I_3) = \begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e facciamo operazioni elementari sulle righe. Indicheremo le righe con R_i e la notazione $R_i \to R_i + cR_j$ indicherà la sostituzione di R_i con $R_i + cR_j$.

Scambiando R_1 con R_3 e poi R_1 con R_2 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $R_3 \to R_3 - aR_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & a+2 & 1 & -a & a \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_3 \to R_3 - bR_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+2-b & 1 & -a & a-b \end{pmatrix}.$$

Supponiamo ora che $a + 2 - b \neq 0$. Dividendo R_3 per $a + 2 - b$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2-b} & -\frac{a}{a+2-b} & \frac{a-b}{a+2-b} \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_1 \to R_1 + R_3$ e $R_2 \to R_2 - R_3$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a+2-b} & \frac{2-b}{a+2-b} & -\frac{2}{a+2-b} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{a+2-b} & \frac{a}{a+2-b} & \frac{2}{a+2-b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2-b} & -\frac{a}{a+2-b} & \frac{a-b}{a+2-b} \end{pmatrix}.$$

Avendo ottenuto, in questo caso, una matrice del tipo $(I_3 \quad B)$ sappiamo che

$$B = A^{-1} = \frac{1}{a+2-b}\begin{pmatrix} 1 & 2-b & -2 \\ -1 & a & 2 \\ 1 & -a & a-b \end{pmatrix}.$$

Se invece $b = a+2$ allora la matrice ottenuta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a & -2 \end{pmatrix}.$$

Mostriamo che in questo caso A non è invertibile: se lo fosse ci sarebbe un'operazione elementare che trasforma la matrice sopra in una del tipo $(I_3 \quad B)$. Se ciò fosse possibile in particolare si potrebbe trasformare la riga $(0,\ 0,\ 0)$ nella riga $(0,\ 0,\ 1)$ con una serie di operazioni elementari, cioè con una combinazione lineare di $(1,\ 0,\ -1)$ e $(0,\ 1,\ 1)$, cioè esisterebbero α, β reali tali che

$$\alpha(1,\ 0,\ -1) + \beta(0,\ 1,\ 1) = (0,\ 0,\ 1)$$

ovvero $(\alpha,\ \beta,\ \beta-\alpha) = (0,\ 0,\ 1)$ e quindi $\alpha = \beta = 0, \beta - \alpha = 1$, assurdo. ■

4. Si consideri lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $U =< A_1, A_2, A_3, A_4 >$ il sottospazio generato da esse. Si calcoli la dimensione di U;

(b) si determini un sottospazio W di $M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$U \oplus W = M_2(\mathbb{R});$$

(c) Sia k un numero reale e siano

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Si determinino (se esistono) i valori di k per i quali $dim U \cap < B_k, C_k >= 1$.

Soluzione Cerchiamo $a_1, \ldots, a_4$ reali tali che

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 = 0$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 - a_4 & 0 \\ 3a_2 + a_3 - 5a_4 & a_1 + 2a_2 - a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè $a_1 + 2a_2 - a_4 = 0, 3a_2 + a_3 - 5a_4 = 0$.

Se poniamo $a_4 = a_1 = 1$ si ottiene $a_2 = 0, a_3 = 5$, mentre se poniamo $a_4 = 0, a_1 = 2$ si ottiene $a_2 = -1, a_3 = 3$. Ciò dice che valgono le due relazioni $A_4 = -A_1 - 5A_3, A_2 = 2A_1 + 3A_3$ e quindi che $< A_1, A_2, A_3, A_4 >=< A_1, A_3 >$. Dato che chiaramente A_1 ed A_3 sono linearmente indipendenti, si deduce che $dim < A_1, A_2, A_3, A_4 >= dim < A_1, A_3 >= 2$, e questo conclude la (a). Per la (b) osserviamo che basta completare A_1, A_3 ad una base di M_2: se infatti $\{A_1, A_3, B, C\}$ è una base e $W =< B, C >$ allora $< A_1, A_3 > \cap W = 0$ (se infatti ci fosse un elemento non nullo $D \in< A_1, A_3 > \cap W$ allora $D = a_1 A_1 + a_3 A_3 = bB + cC$ per alcuni numeri reali a_1, a_3, b, c non tutti nulli, ma questo da la contraddizione che A_1, A_3, B, C sono linearmente dipendenti). Dall'espressione delle matrici si vede facilmente che la scelta

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

funziona: per quanto detto basta mostrare che $\{A_1, A_3, B, C\}$ è una base, e cioè, dato che $dim M_2 = 4$, per [Sernesi, Prop. 4.16], che sono linearmente indipendenti. Ora

$$aA_1 + bA_3 + cB + dC = 0$$

vuol dire

$$\begin{pmatrix} a + c & d \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $a = b = c = d = 0$, e questo conclude la (b). Per mostrare la (c) osserviamo intanto B_k e C_k sono linearmente indipendenti se e solo se $k \neq 0$. Applichiamo la formula di Grassmann:

$$dim < A_1, A_2, A_3, A_4 > \cap < B_k, C_k >= dim < A_1, A_3 > \cap < B_k, C_k >=$$

$$= 2 + dim < B_k, C_k > - dim < A_1, A_3, B_k, C_k >= 1$$

se e solo se

$$(*) \quad dim < A_1, A_3, B_k, C_k >= dim < B_k, C_k > +1.$$

Ora se $k = 0$ $(*)$ è $dim < A_1, A_3, B_0, C_0 >= 2$, ma questo non è possibile in quanto abbiamo già visto sopra che A_1, A_3, B_0 sono linearmente indipendenti. Se $k \neq 0$ abbiamo

$dim < A_1, A_3, B_k, C_k >= 3$: infatti $C_k = kA_1$, mentre A_1, A_3, B_k sono linearmente indipendenti, in quanto chiaramente $B_k \notin < A_1, A_3 >$ (l'elemento di posto (1,2) è zero sia in A_1 che in A_3, mentre è diverso da zero in B_k). Dunque $dim U \cap < B_k, C_k >= 1$ se e solo se $k \neq 0$. ■

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e U, W_1, W_2 suoi sottospazi.
(a) Si dimostri che $U \cap (W_1 + W_2) \supseteq (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$;
(b) si dia un'esempio in cui non vale l'uguaglianza in (a);
(c) si determini esplicitamente la condizione tra i sottospazi per la quale
$U \cap (W_1 + W_2) = (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$.

Soluzione (a) Un elemento di $(U \cap W_1) + (U \cap W_2)$ è una somma $v_1 + v_2$ dove $v_1 \in U \cap W_1, v_2 \in U \cap W_2$. Visto che $v_1, v_2 \in U$ si ha che $v_1 + v_2 \in U$, e visto che $v_1 \in W_1, v_2 \in W_2$ si ha che $v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$. Quindi $v_1 + v_2 \in U \cap (W_1 + W_2)$. (b) Siano $V = \mathbb{R}^2, W_1 = \text{asse x} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}, W_2 = \text{asse y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}, U = \text{bisettrice} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$. Allora si ha $U \cap W_1 = U \cap W_2 = \{0\}, W_1 + W_2 = V$ e quindi $U \cap (W_1 + W_2) = U$. (c) Per la (a) $(U \cap W_1) + (U \cap W_2) = U \cap (W_1 + W_2)$ se e solo se hanno la stessa dimensione. Per la formula di Grassmann si ha

$$dim U \cap (W_1 + W_2) = dim U + dim(W_1 + W_2) - dim(U + W_1 + W_2) =$$

$$= dim U + dim W_1 + dim W_2 - dim W_1 \cap W_2 - dim(U + W_1 + W_2),$$

$$dim((U \cap W_1) + (U \cap W_2)) = dim(U \cap W_1) + dim(U \cap W_2) - dim(U \cap W_1 \cap W_2) =$$

$$= dim U + dim W_1 - dim(U + W_1) + dim U + dim W_2 - dim(U + W_2) - dim(U \cap W_1 \cap W_2).$$

Allora vale l'uguaglianza in (a) se e solo se

$$dim U + dim W_1 \cap W_2 + dim(U + W_1 + W_2) = dim(U + W_1) + dim(U + W_2) + dim(U \cap W_1 \cap W_2).$$

Ancora

$$dim(U + W_1 + W_2) = dim((U + W_1) + (U + W_2)) =$$

$$= dim(U + W_1) + dim(U + W_2) - dim((U + W_1) \cap (U + W_2))$$

e quindi vale l'uguaglianza in (a) se e solo se

$$dim U + dim W_1 \cap W_2 - dim(U \cap W_1 \cap W_2) = dim((U + W_1) \cap (U + W_2)).$$

Ma il primo membro è proprio $dim(U + (W_1 \cap W_2))$, e dato che

$$U + (W_1 \cap W_2) \subseteq (U + W_1) \cap (U + W_2)$$

si conclude che vale l'uguaglianza in (a) se e solo se

$$U + (W_1 \cap W_2) = (U + W_1) \cap (U + W_2). \blacksquare$$