UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2001-2002

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2001-2002

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di V e di W;

(b) si dimostri tale risultato.

2. Siano a e b due numeri reali. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + ax_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ bx_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni.

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

4. Si consideri lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $U =< A_1, A_2, A_3, A_4 >$ il sottospazio generato da esse. Si calcoli la dimensione di U;

(b) si determini un sottospazio W di $M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$U \oplus W = M_2(\mathbb{R});$$

(c) Sia k un numero reale e siano

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Si determinino (se esistono) i valori di k per i quali $dim U \cap < B_k, C_k >= 1$.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e U, W_1, W_2 suoi sottospazi.

(a) Si dimostri che $U \cap (W_1 + W_2) \supseteq (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$;

(b) si dia un'esempio in cui non vale l'uguaglianza in (a);

(c) si determini esplicitamente la condizione tra i sottospazi per la quale

$U \cap (W_1 + W_2) = (U \cap W_1) + (U \cap W_2)$.