UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 18-2-2003 - a.a. 2001-2002

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

(a) Si enunci un risultato che relaziona le dimensioni di V e di W;

(b) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + hX_3 = 0 \\ hX_1 + X_3 + hX_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 = 2 \\ X_1 - hX_2 - X_4 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli, con sole operazioni elementari, l'inversa.

4. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e siano

$$v_1 = e_1 - e_2 + e_4, v_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, v_3 = 2e_1 - 4e_2 - e_3 + 2e_4, v_4 = 4e_2 + 2e_3.$$

(a) Sia $U =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ il sottospazio generato da essi. Si calcoli la dimensione di U;

(b) si determini un sottospazio W di V tale che

$$U \oplus W = V;$$

(c) Sia k un numero reale e siano

$$u_k = ke_1 - e_2, v_k = e_1 + ke_2.$$

Si determinino (se esistono) i valori di k per i quali $dim U \cap < u_k, v_k >= 1$.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.
(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore ed diagonalizzabilità di F;
(b) Si enunci il risultato che caratterizza la diagonalizzabilità di F (senza usare le basi);
(c) si dimostri tale risultato.

6. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine e si considerino le due rette di equazioni parametriche seguenti:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \mathcal{R}_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 3s \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Esiste un piano che contiene tutte e due le rette?
(b) Determinare tutte le coppie di punti $P_1 \in \mathcal{R}_1, P_2 \in \mathcal{R}_2$ tali che P_1, P_2 e $P_3 = (1, 0, 1)$ sono allineati.

7. Sia k un numero reale e si considerino l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (x + 2y, x + ky)$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini se esistono valori di k tali che $\mathbb{R}^2/N(F)$ ha dimensione 1, e per un tale k, si determini una base di $\mathbb{R}^2/N(F)$;

(b) si determini se esistono valori di k tali che A è la matrice di F in qualche base di $\mathbb{R}^2$.

8. Siano $v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $v_1 + v_2 \in N(F), F(E_2) = E_3, F(E_1) = E_1 + cE_3$ per qualche numero reale c, dove E_1, E_2, E_3 è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare una matrice di F;
(b) trovare basi per gli autospazi di F;
(c) determinare i valori di c per i quali F è diagonalizzabile.