UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 16-7-2002 - a.a. 2001-2002

1. Sia V uno spazio vettoriale reale.

(a) Si definiscano le nozioni di indipendenza lineare tra vettori di V e di dimensione di V;

(b) Si enunci il risultato che relaziona la dipendenza o indipendenza lineare tra due insiemi di vettori di V ed il loro numero;

(c) si dimostri tale risultato.

Soluzioni (a) [Sernesi, Def. 4.4 e 4.14]. (b) e (c) [Sernesi, Teor. 4.12]. qed

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} hX_1 + hX_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + hX_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + hX_2 - X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + hX_3 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

Soluzioni. Applichiamo il metodo di Gauss-Jordan alla matrice

$$\begin{pmatrix} h & h & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & h & 1 & 0 \\ 1 & h & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & h & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con scambi di righe otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 & 0 \\ 1 & 1 & h & 0 & 0 \\ 1 & h & -1 & 0 & 1 \\ h & h & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - R_1, R_4 \to R_4 - hR_1$ danno

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & h & -1-h & -1 & 1 \\ 0 & h & 1-h^2 & -h & 1 \end{pmatrix};$$

con le operazioni $R_3 \to R_3 - hR_2, R_4 \to R_4 - hR_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-h & -1+h & 1 \\ 0 & 0 & 1-h^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, ancora scambiando righe, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-h & -1+h & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $h = \pm 1$ allora la terza equazione è $0 = 1$ ed il sistema è incompatibile.
Se invece $h \neq \pm 1$ con l'operazione $R_4 \to R_4 + \frac{1}{1-h} R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-h^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1+h & \frac{h}{1-h} \end{pmatrix}$$

che determina l'unica soluzione del sistema

$$x_1 = \frac{2}{(1+h)(h-1)^2}, \ x_2 = x_4 = \frac{h-2}{(h-1)^2}, \ x_3 = \frac{1}{1-h^2}. \ \blacksquare$$

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Si determinino, con sole operazioni elementari, i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

3. Applichiamo operazioni elementari alla matrice

$$\begin{pmatrix} b & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con scambi di righe otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui l'operazione $R_3 \to R_3 - bR_1$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+ab & 1 & -b & b \end{pmatrix}$$

e l'operazione $R_4 \to R_4 - R_3$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ab & 1 & -b & b-1 \end{pmatrix}.$$

Ora se $a = 0$ oppure $b = 0$ allora la terza riga ha i primi tre elementi nulli e non si può ottenere I_3 nel primo blocco, dunque A non è invertibile (ciò è confermato dal fatto che $det(A) = ab$).

Se invece $ab \neq 0$ dividendo R_4 per ab si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{a} & \frac{b-1}{ab} \end{pmatrix}$$

e le operazioni $R_1 \to R_1 + aR_4, R_2 \to R_2 - aR_4$ danno la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{b} & 1 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{a} & \frac{b-1}{ab} \end{pmatrix}$$

e quindi, in tal caso,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b} & 1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{ab} & -\frac{1}{a} & \frac{b-1}{ab} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

4. Sia $k \in \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}^4$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Siano $w_1 = (1,0,2,3), w_2 = (0,0,2,1), w_3 = (\frac{k}{3} - 1, -1, \frac{2k-1}{3}, \frac{3k-2}{3}), w_4 = (1,1,1,1)$, $u_1 = (1,0,1,1), u_2 = (22,4,16,20), u_3 = (-1,2,-2,0), u_4 = (1,1,0,1)$ e $U =< u_1, u_2, u_3, u_4 >, W =< w_1, w_2, w_3, w_4 >$.

(a) Determinare $U \cap W$ ed una sua base;

(b) determinare tutti i sottospazi L di dimensione 2 di V tali che

$$U \cap W + L \neq V.$$

Soluzioni. Si osserva facilmente che

$$kw_1 + w_2 - 3w_4 = 3w_3, \ 6u_1 - u_3 + 4u_4 = \frac{1}{2}u_2,$$

e che il rango delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

è 3, e quindi le due terne w_1, w_2, w_4 e u_1, u_3, u_4 sono linearmente indipendenti, da cui $W =< w_1, w_2, w_4 >, U =< u_1, u_3, u_4 >$. Per risolvere (a) osserviamo prima che i quattro vettori w_1, w_2, w_4, u_1 sono linearmente indipendenti, dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

da cui $W + U = V$ e $dim U \cap W = 2$ per la formula di Grassmann. Ora scriviamo prima le equazioni di W: un vettore (X, Y, Z, T) sta in W se e solo se

$$(X, Y, Z, T) = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_4 = (\alpha + \gamma, \gamma, 2\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + \beta + \gamma)$$

da cui, eliminando α, β, γ si ottiene l'equazione di W

$$4X - 3Y + Z - 2T = 0.$$

Ora ogni vettore di U è del tipo $au_1 + bu_3 + cu_4 = (a - b + c, 2b + c, a - 2b, a + c)$ e quindi, sostituendo nell'equazione di W, si ha che sta in W se e solo se $c = 3a - 12b$. Allora i vettori di $U \cap W$ sono $au_1 + bu_3 + (3a - 12b)u_4 = a(u_1 + 3u_4) + b(u_3 - 12u_4)$ al variare dei numeri reali a, b. Abbiamo allora dimostrato che

$$U \cap W \text{ ha per base } \{u_1 + 3u_4, u_3 - 12u_4\}.$$

(b) Dato che, per ipotesi, $U \cap W \subseteq (U \cap W) + L \neq V$ si ha che $dim (U \cap W) + L = 2, 3$. Nel primo caso, dato che anche $dim U \cap W = 2$, ne segue che $U \cap W = (U \cap W) + L$ e quindi che $L \subseteq U \cap W$, cioè $L = U \cap W$. Nel secondo caso $dim(U \cap W) + L = 1$ quindi $L =< v_1, v_2 >$ si ottiene scegliendo due vettori linearmente indipendenti v_1, v_2 di cui uno v_1 è un qualsiasi vettore di $U \cap W$ e l'altro v_2 è un qualsiasi vettore non appartenente a $U \cap W$. ■

5. (a) Si definiscano le nozioni di spazio e sottospazio affine;
(b) si enunci il risultato che relaziona l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con i sottospazi affini;
(c) si dimostri tale risultato.

Soluzioni (a) [Sernesi, Def. 7.1 e 7.4]. (b) e (c) [Sernesi, Teor. 8.1]. ■

6. Sia **A** uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia Oe_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Siano $A(3,1,0), B(0,1,1)$ e $Q(1,1,1)$ tre punti di **A** e r la retta in **A** di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2X - Y + Z + 2 = 0 \\ X + Y - Z - 2 = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare se esistono punti P appartenenti alla retta $\overline{AB}$ tali che la retta $\overline{PQ}$ è complanare con r.

(b) Determinare se esistono punti P **non appartenenti** alla retta $\overline{AB}$ tali che la retta $\overline{PQ}$ è incidente r.

Soluzioni Si ha $\overrightarrow{AB} = (-3,0,1)$ e quindi le equazioni parametriche della retta $\overline{AB}$ sono $\begin{cases} X = -3t \\ Y = 1 \\ Z = t+1 \end{cases}$, mentre le equazioni cartesiane sono $\begin{cases} X + 3Z - 3 = 0 \\ Y = 1 \end{cases}$.

(a) Sia $P = (-3t, 1, t+1) \in \overline{AB}$ e quindi $\overrightarrow{PQ} = (1+3t, 0, -t)$, e le equazioni di $\overline{PQ}$ sono $\begin{cases} X = (1+3t)u + 1 \\ Y = 1 \\ Z = -tu + 1 \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$. Osservando che r è la retta parallela a $v = (0,1,1)$ e passante per $R = (0,2,0)$ si ha, per [Sernesi, Prop. 10.4, 2)], che $\overline{AB}$ è complanare con $\overline{PQ}$ se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1+3t & 0 & -t \end{vmatrix} = 0$$

cioè se e solo se $t = -\frac{2}{7}$. L'unica soluzione di (a) è quindi il punto $P_0 = (\frac{6}{7}, 1, \frac{5}{7})$.

(b) Sia ora $P = (a,b,c) \notin \overline{AB}$ e quindi $\overrightarrow{PQ} = (1-a, 1-b, 1-c), \overline{PQ} : \begin{cases} X = (1-a)t + 1 \\ Y = (1-b)t + 1 \\ Z = (1-c)t + 1 \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$. Per far si' che $\overline{PQ}$ sia incidente r basterà imporre che siano complanari ma non parallele. Ora $\overline{PQ}$ è complanare con r se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1-a & 1-b & 1-c \end{vmatrix} = 0$$

cioè se e solo se $c = 2a + b - 2$. Quindi, viste le equazioni cartesiane di $\overline{AB}$, la condizione $P \notin \overline{AB}$ equivale a $b \neq 0$ oppure $a \neq -\frac{3}{7}b + 1$ e la condizione di non parallelismo tra $\overline{PQ}$ ed r equivale ad imporre che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-a & 1-b & 1-c \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

abbia rango 2, e ciò, per il principio dei minori orlati, è equivalente ad $a \neq 1$. Dunque (b) ha per soluzione tutti i punti $P = (a, b, 2a+b-2)$ dove $a \neq 1$ e $b \neq 0$ oppure $a \neq -\frac{3}{7}b + 1$.
■

7. Sia $A \in M_2$ una matrice e $F : M_2 \to M_2$ l'applicazione definita da

$$F(B) = AB.$$

(a) Dimostrare che F è lineare e calcolare una matrice di F;

(b) determinare $N(F), Im(F)$ e le loro dimensioni in funzione di A;

(c) determinare per quali A si ha che F è iniettiva.

Soluzioni. (a) Si ha $F(cB + c'B') = A(cB + c'B') = cAB + c'AB' = cF(B) + c'F(B')$, $\forall B, B' \in M_2, c, c' \in \mathbb{R}$, dunque F è lineare.
Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Consideriamo la base
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ di M_2. Si ha

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = ae_1 + ce_3$$

e, analogamente,

$$F(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = ae_2 + ce_4, F(e_3) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = be_1 + de_3, F(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = be_2 + de_4,$$

da cui la matrice di F nella base data è

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

(b) e (c) Per definizione di F si ha

$$Im(F) = \{C \in M_2 : C = AB \text{ per qualche } B \in M_2\}$$

$$N(F) = \{B \in M_2 : AB = 0\}.$$

Ora calcoliamo il rango di F. Se $A = 0$ allora $F = 0$ e quindi il suo rango è 0 e $dimN(F) = 4$. Supponiamo d'ora in poi $A \neq 0$. Un semplice calcolo da

$$det(F) = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 = (det(A))^2$$

dunque il rango di F è 4, $dimN(F) = 0$, cioè F è iniettiva, se e solo se $det(A) \neq 0$. Supponiamo allora $det(A) = 0$. Uno dei quattro minori $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$, $\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = b^2$, $\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = c^2$, $\begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = d^2$ dovrà essere non nullo, dunque il rango di F è almeno 2. Orlando per esempio la sottomatrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, si vede che, per il principio dei minori orlati, il rango di F è 2 in questo caso e quindi anche $dimN(F) = 2$. ∎

8. Sia m un numero reale ed $A \in M_4$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) Determinare per quali valori di m la matrice A è diagonalizzabile;

(c) Per almeno un valore trovato in (b) trovare una matrice $M \in GL_4$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

Soluzioni. Si ha, sviluppando due volte per l'ultima riga,

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} -1-T & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-T & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1-T & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-T \end{vmatrix} = (m-T) \begin{vmatrix} -1-T & 1 & 0 \\ -1 & 1-T & 1 \\ 0 & 0 & -1-T \end{vmatrix} =$$

$$= T^2(T+1)(T-m).$$

(b) Uno degli autovalori di A è $\lambda_1 = 0$ e sappiamo che

$$dimV_0(A) = dimN(A) = 4 - r(A).$$

Ora $det(A) = 0$, mentre, per il principio dei minori orlati, si verifica che il rango di A è 2 se e solo se $m = 0$, altrimenti è 3. Ma allora se $m = 0$ si ha che $dimV_0(A) = 2$, mentre $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità algebrica 3, mentre se $m \neq 0$ si ha che $dimV_0(A) = 1$, mentre $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità algebrica 2. In entrambi i casi ne segue che A non è diagonalizzabile per il Teorema 13.13 di [Sernesi]. (c) non esiste. ■