ISTITUZIONI di FISICA MATEMATICA (FM2) (1 modulo), A.A. 2001/02
COMPITO (8/1/02)

Esercizio 1 (6 punti)
Si determini la soluzione di

$$\Delta u(x,y) = xy \qquad 0 < x < \pi \qquad\qquad 0 < y < 1$$
$$u(x,0) = u(x,1) = 0 \qquad 0 \le x \le \pi; \qquad \frac{\partial u}{\partial n}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial n}(\pi,y) = 0 \qquad 0 \le y \le 1$$

Soluzione Si ponga

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m}\cos m\pi y \sin nx$$

con $A_{n,m}$ costanti da determinare. Tale scelta soddisfa le condizioni al bordo. Sia

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \qquad y = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\pi y$$

con a_n e b_m i rispettivi coefficienti di Fourier

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx \qquad\qquad b_m = 2\int_0^{\pi} y \cos m\pi y dy$$

Dall'equazione si ottiene

$$-(n^2+m^2)A_{n,m} = a_n b_m$$

e quindi

$$A_{n,m} = -\frac{a_n b_m}{(n^2+m^2)}$$

La serie di $u(x,y)$ é uniformemente convergente poiché $|A_{n,m}\cos m\pi y \sin nx| \le \frac{C}{(n^2+m^2)}$. La serie che si ottiene derivando i termini della serie é ancora uniformemente convergente, poiché i coefficienti di Fourier $|a_n| \le \frac{c}{n^k}$ e $|b_m| \le \frac{c}{m^k}$ poiche' x e y sono funzioni C^{∞}.

Esercizio 2 (6 punti)
Verificare l'esistenza e determinare la soluzione

$$xuu_x + u_y = 1$$
$$u(1,y) = \frac{1}{2}y$$

Soluzione La soluzione esiste per $y \neq 0$. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t,s) = xz \\
&\frac{d}{dt}y(t,s) = 1 \\
&\frac{d}{dt}z(t,s) = 1 \\
&x(0,s) = 1 \qquad y(0,s) = s \qquad z(0,s) = \frac{1}{2}s
\end{aligned} \tag{1}$$

La soluzione é

$$\log x(t,s) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}st$$

$$y(t,s) = t+s \qquad\qquad z(t,s) = t + \frac{1}{2}s$$

Si ottiene $t = y - s$ e quindi $\log x = \frac{1}{2}(y-s)^2 + \frac{1}{2}s(y-s) = \frac{1}{2}(y^2 - sy)$. Quindi $s = y - \frac{2}{y}\log x$.

Sostituendo si ottiene

$$u(x,y) \equiv z(t(x,y), s(x,y)) = t + \frac{1}{2}s = y - \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}y + \frac{1}{y}\log x$$

Esercizio 3 (6 punti)
Si determini la soluzione $u(x,t)$ di

$$\begin{aligned} &u_{xx} = u_t \qquad && x > 0 \qquad t > 0 \\ &u_x(0,t) = 0 && t > 0 \\ &u(x,0) = e^{-x} && x > 0 \end{aligned}$$

Soluzione La soluzione é data dalla restrizione per $x > 0$ della soluzione del seguente problema

$$\begin{aligned} &v_{xx} = v_t \qquad && x \in \mathbb{R} \qquad t > 0 \\ &v(x,0) = e^{-|x|} && x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

La soluzione é data da

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{-|y|} dy$$

Quindi la soluzione per $x > 0$ é

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right] e^{-y} dy$$

Nota: si estende il dato iniziale in modo pari poiché la condizione in $x = 0$ in (1) é riflettente.

Esercizio 4 (8 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} \qquad && 0 < x < 1 \qquad 0 < t \\ &u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = 0 && 0 < x < 1 \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 && 0 < t \end{aligned}$$

Si chiede inoltre di studiare il comportamento di

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2] dx$$

in funzione di t.

Soluzione
Dato $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin n\pi x$ e $1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$,

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \frac{2}{n}[1 - (-1)^n]$$

si ottiene

$$\begin{array}{lll} c_n''(t) = -n^2 c_n(t) + b_n e^{-t} & & 0 < t \\ c_n(0) = 0 & c_n'(0) = 0 & t > 0 \end{array}$$

La soluzione é data da $c_n(t) \equiv 0$ per n pari e per n dispari da

$$c_n(t) = \frac{b_n}{n} \int_0^t e^{-s} \sin n(t-s) ds$$

Per studiare il comportamento di $E(t)$ rispetto a t si deriva

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^1 [u_t u_{tt} - u_x u_{xt}]dx = \int_0^1 u_t[u_{tt} - u_{xx}]dx$$
$$+ u_x(1,t)u_t(1,t) - u_x(0,t)u_t(0,t) = e^{-t} \int_0^1 u_t(x,t)dx$$

Poiché $u_t(0,t) = u_t(1,t) = 0$ il primo termine nell'ultima riga é nullo. L'integrale $\int_0^1 u_t(x,t)dx$ é limitato per ogni valore di t. Per tempi lunghi si vede che l' energia diminuisce, $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$.

Esercizio 5 (4 punti)
Si rappresenti la soluzione $u(x,y,t)$ di

$$\begin{array}{lll} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 & 0 < t \\ u(x,y,0) = 0 & u_t(x,y,0) = e^{-[x^2+y^2]} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Soluzione La soluzione é data da

$$u(x,y,t) = \int_{B_{x,y}(t)} \frac{e^{-[z^2+w^2]}}{\sqrt{t^2 - (x-z)^2 - (y-w)^2}} dzdw$$

con $B_{(x,y)}(t)$ la palla di centro (x,y) e raggio t.