ISTITUZIONI di FISICA MATEMATICA (FM2) (1 modulo), A.A. 2001/02
COMPITO (3/6/02)

Esercizio 1 (8 punti)
Si determini la soluzione di

$$\begin{aligned}
&\Delta u(x,y) = 0 \qquad 1 < x^2 + y^2 < 4, \qquad y > 0\\
&u(x,y) = 0; \qquad x^2 + y^2 = 1 \qquad y > 0\\
&\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = 1 \qquad x^2 + y^2 = 4 \qquad y > 0\\
&u(x,y) = 0; \qquad 1 \le x^2 \le 4, \qquad y = 0
\end{aligned}$$

Soluzione Si cerca la soluzione in coordinate polari come superposizioni di armoniche

$$u(r,\theta) = M + N\theta + A\log r + \sum_{n\ge1}(\frac{r}{2})^n[A_n\cos n\theta + B_n \sin n\theta]$$
$$+\sum_{n\ge1}(\frac{r}{2})^{-n}[C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta]$$

Imponendo la condizione al bordo

$$u(r,0) = 0; \qquad u(r,\pi) = 0 \qquad 1 \le r \le 2$$

si ottiene

$$M = N = A = A_n = C_n = 0 \qquad n \ge 1$$

Imponendo la condizione al bordo

$$u(1,\theta) = 0 \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

si ottiene

$$\sum_{n\ge1}\left[\frac{1}{2^n}B_n + 2^n D_n\right] = 0$$

Quindi

$$\frac{1}{2^n}B_n + 2^n D_n = 0 \qquad \forall n \ge 1$$

ottenendo

$$B_n = -2^{2n}D_n$$

Imponendo la condizione al bordo

$$u_r(2,\theta) = 1 \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

si ottiene

$$\frac{1}{2}\sum_{n\ge1} n\left[B_n - D_n\right]\sin n\theta = 1$$

e sostituendo

$$\frac{1}{2}\sum_{n\ge1} nD_n\left[2^{2n}+1\right]\sin n\theta = -1$$

Sviluppando in serie di Fourier 1 nell intervallo $[0, \pi]$ si ottiene

$$1 = \sum_{n \geq 1} a_n \sin n\theta$$

con

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin n\theta d\theta = \frac{2}{2\pi}[1 - (-1)^n]$$

Si ottiene quindi

$$D_n = -2 \frac{a_n}{n\left[2^{2n} + 1\right]}$$

e la soluzione in coordinate polari é quindi

$$u(r, \theta) = \sum_{n \geq 1} D_n \sin n\theta$$

Esercizio 2 (7 punti)
Verificare l'esistenza e determinare la soluzione di

$$\begin{aligned}
&(1 - y^2) u_y + u_x = u \\
&u(x, 0) = x
\end{aligned}$$

Si determini sin dove é possibile estendere la soluzione trovata.

Soluzione La soluzione esiste localmemte ed é unica per ogni x in $\mathbb{R}$. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} x(t, s) = 1 \\
&\frac{d}{dt} y(t, s) = (1 - y^2) \\
&\frac{d}{dt} z(t, s) = z \\
&x(0, s) = s \qquad y(0, s) = 0 \qquad z(0, s) = s
\end{aligned} \tag{1}$$

La soluzione é

$$x(t, s) = t + s \qquad\qquad z(t, s) = e^t s$$

Risolvendo per $y \in (-1, 1)$

$$\int_0^y \frac{1}{1 - v^2} dv = \frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{1 - y} = \text{ arctanh } y$$

si ottiene

$$y(t, s) = \tanh t$$

$$u(x, y) \equiv z(t(x, y), s(x, y)) = \left[\frac{1 + y}{1 - y}\right]^{\frac{1}{2}} [x - \text{ arctanh } y]$$

Puó essere estesa per $y \in (-1, 1)$.

Esercizio 3 (8 punti)
Si determini la soluzione $u(x,t)$ di

$$u_{xx} + e^{-x^2} \sin x e^{-t} = u_t \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0$$
$$u(x,0) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

e si dimostri che $\sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |u(x,t)| \leq 1$.

Soluzione La soluzione é

$$u(x,t) = \int_0^t e^{-s} ds \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} e^{-y^2} \sin y dy$$

Si ottiene facilmente la stima

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |e^{-x^2} \sin x| \int_0^t e^{-s} ds \leq 1 - e^{-t}$$

Esercizio 4 (7 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t$$
$$u(x,0) = x \qquad u_t(x,0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1$$
$$u_x(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0 \qquad 0 < t$$

Si discuta la regolaritá della soluzione trovata.

Soluzione La soluzione si trova per separazione di variabile

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n(t) \cos \frac{2n-1}{2}\pi x$$

con $c_n(t)$ soluzione di

$$c_n''(t) = -\left[\frac{2n-1}{2}\pi\right]^2 c_n(t) \qquad 0 < t \qquad n \geq 1$$
$$c_n(0) = a_n \qquad c_n'(0) = 0$$

dove a_n é

$$a_n = \int_0^1 x \cos \frac{2n-1}{2}\pi x dx$$

La soluzione generale é data

$$c_n(t) = A_n \cos \frac{2n-1}{2}\pi t + B_n \sin \frac{2n-1}{2}\pi t$$

Dalle condizioni iniziali si ottiene $B_n = 0$ e $A_n = a_n$ per $n \geq 1$. Quindi

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n \cos \frac{2n-1}{2}\pi t \cos \frac{2n-1}{2}\pi x$$

Se $|a_n| \leq \frac{1}{n^4}$ allora la serie che determina la soluzione, come pure le serie ottenute derivando due volte rispetto a t e x ciascun termine della serie, convergono uniformemente per $x \in [0,1]$ e $t \geq 0$.