ISTITUZIONI di FISICA MATEMATICA (FM2) (1 modulo), A.A. 2001/02
COMPITO (9/4/02)

Esercizio 1 (7 punti)
Si determini la soluzione di

$$\begin{aligned}
&\Delta u(x,y) = 0 \qquad && 1 < x^2 + y^2 < 4 \\
&u(x,y) = 0; && x^2 + y^2 = 1 \\
&\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = 1 && x^2 + y^2 = 4
\end{aligned}$$

Soluzione Si cerca la soluzione in coordinate polari come superposizioni di armoniche

$$u(r,\theta) = M + A\log r + \sum_{n\geq 1}(\frac{r}{2})^n[A_n\cos n\theta + B_n \sin n\theta]$$
$$+\sum_{n\geq 1}(\frac{r}{2})^{-n}[C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta]$$

Imponendo le condizioni al bordo si ricava

$$u(1,\theta) = M = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial r}(2,\theta) = \frac{A}{2} = 1$$

Si ottiene quindi

$$u(r,\theta) = 2\log r$$

In coordinate cartesiane $u(x,y) = \log[x^2 + y^2]$.

Esercizio 2 (7 punti)
Verificare l'esistenza e determinare la soluzione di

$$\begin{aligned}
&u_y + uu_x = 1 \\
&u(x,0) = x^2
\end{aligned}$$

Soluzione La soluzione esiste localmemte ed e' unica per ogni $x \in \mathbb{R}$. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t,s) = z \\
&\frac{d}{dt}y(t,s) = 1 \\
&\frac{d}{dt}z(t,s) = 1 \\
&x(0,s) = s \qquad y(0,s) = 0 \qquad z(0,s) = s^2
\end{aligned} \tag{1}$$

La soluzione é

$$z(t,s) = t + s^2 \qquad y(t,s) = t \quad x(t,s) = \frac{1}{2}t^2 + s^2 t + s$$

Si ricava facilmente

$$y = t \qquad s_\pm = \frac{1}{2y}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4[\frac{1}{2}y^2 - x]y}\right]$$

La scelta di $s_\pm$ si ottiene verificando che la soluzione soddisfa le condizioni iniziali. Quindi posto

$$u_\pm(x,y) = z_\pm(t(x,y), s(x,y)) = y + s_\pm^2(x,y)$$

si verifica facilmente che

$$\lim_{y\to 0} u_+(x,y) = x^2$$

Quindi la soluzione $u(x,y) = u_+(x,y)$. La soluzione puó estendersi a tutti i valori di y tali che $1 - 4[\frac{1}{2}y^2 - x]y > 0$.

Esercizio 3 (8 punti)
Si determini la soluzione $u(x,t)$ di

$$\begin{aligned} & u_{xx} + \sin x = u_{tt} \qquad 0 < x; \qquad t > 0 \\ & u(0,t) = 0 \qquad t > 0 \\ & u(x,0) = x \qquad u_t(x,0) = 0 \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Soluzione
Cerchiamo la soluzione $u(x,t) = v(x,t) + \sin x$ con $v(x,t)$ soluzione di

$$\begin{aligned} & v_{xx} = v_{tt} \qquad 0 < x; \qquad t > 0 \\ & v(0,t) = 0 \qquad t > 0 \\ & v(x,0) = x - \sin x \qquad v_t(x,0) = 0 \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Per risolvere quest'ultimo problema si estendono i dati iniziali per $x < 0$ in modo dispari ponendo $w(x,t) = v(x,t)$ se $x \geq 0$ e $w(x,t) = -v(-x,t)$ se $x < 0$ ottenendo

$$\begin{aligned} & w_{xx} = w_{tt} \qquad t > 0 \\ & w(x,0) = x - \sin x \qquad w_t(x,0) = 0 \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La soluzione é

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[2x - sin(x+t) - sin(x-t)]$$

Si ottiene quindi

$$u(x,t) = \sin x + \frac{1}{2}[2x - sin(x+t) - sin(x-t)] \qquad x \geq 0, t \geq 0$$

Esercizio 4 (8 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t \\
&u(x,0) = x \qquad 0 < x < 1 \\
&u_x(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 1 \qquad 0 < t
\end{aligned}$$

Si discuta inoltre la regolaritá della soluzione trovata. Sia inoltre $v(x,t)$ la soluzione di (1) con dato iniziale al tempo $t = 0$, tale che $v(x,0) = x + 10^{-2}\tan x$. Si stimi la differenza tra $v(t)$ e $u(t)$.

Soluzione Si ponga $u = g + 1$ con g soluzione di

$$\begin{aligned}
&g_t = g_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t \\
&g(x,0) = x - 1 \qquad 0 < x < 1 \\
&g_x(0,t) = 0 \qquad g(1,t) = 0 \qquad 0 < t
\end{aligned}$$

La soluzione puó o ttenersi per separazione di variabile. Utilizzando le condizioni al bordo si ottiene, posto $l_n = [(2n-1)\frac{\pi}{2}]^2$

$$g(x,t) = \sum_{n\geq 1} e^{-l_n t} A_n \cos\sqrt{l_n}x$$

con A_n determinabili imponendo

$$v(x,0) = \sum_{n\geq 1} A_n \cos\sqrt{l_n}x = x - 1$$

Si ottiene

$$A_n = \int_0^1 (x-1)\cos\sqrt{l_n}x dx$$

La soluzione é C^∞ per $(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+$. Poiche anche i dati al bordo sono regolari la soluzione é C^∞ per $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+$.

Dalla dipendenza continua dai dati iniziali si ottiene

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in[0,1]} |v(t,x) - u(t,x)| \leq 10^{-2}\tan 1$$