ISTITUZIONI di FISICA MATEMATICA (FM2) (1 modulo), A.A. 2001/02
COMPITO (1/2/02)

Esercizio 1 (7 punti)
Si determini la soluzione di

$$\Delta u(x,y) = x^2y^2 \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < y < 2$$
$$u(x,0) = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial n}(x,2) = 0 \qquad 0 < x < 1$$
$$u(0,y) = 0; \qquad u(1,y) = 0 \qquad 0 < y < 2$$

Si discuta la regolaritá della soluzione trovata.

Soluzione Si cerca la soluzione nella forma

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\frac{\pi}{2}(\frac{2n+1}{2})y \sin m\pi x \tag{1}$$

La funzione in (1) soddisfa le condizioni al bordo richieste. Le costanti A_{nm} si determinano nel modo seguente.

$$-\left\{[\frac{\pi}{2}(\frac{2n+1}{2})]^2 + [m\pi]^2\right\} A_{nm} = b_n c_m$$

dove b_n sono i coefficienti di Fourier di

$$y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi}{2}(\frac{2n+1}{2})y$$

$$b_n = \int_0^2 y^2 \sin\frac{\pi}{2}(\frac{2n+1}{2})y dy$$

e c_m i coefficienti di Fourier di x^2

$$x^2 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin m\pi x$$

$$c_m = 2\int_0^1 x^2 \sin m\pi x dx$$

Si ottiene

$$A_{nm} = -b_n c_m \left\{[\frac{\pi}{2}(\frac{2n+1}{2})]^2 + [m\pi]^2\right\}^{-1} \tag{2}$$

La serie in (1) con A_{nm} in (2) é uniformente convergente, poiché il generico termine della serie é stimato per $0 < x < 1$ e $0 < y < 2$ da

$$\left|A_{nm} \sin\frac{\pi}{2}(\frac{2n+1}{2})y \sin m\pi x\right| \le C\left\{[\frac{\pi}{2}(\frac{2n+1}{2})]^2 + [m\pi]^2\right\}^{-1}$$

Quindi la serie in (1) é maggiorata da una serie convergente e questo implica che é uniformente convergente. Per verificare che la $u(x,y)$ é una soluzione almeno C^2 sia in x, sia in y (in realtá $u \in C^\infty$) si usa

$$|b_n| \le \frac{1}{n^k} \qquad |c_n| \le \frac{1}{n^k} \qquad k \ge 1$$

pioiché $x^2y^2 \in C^\infty$.

Esercizio 2 (7 punti)
Verificare l'esistenza e determinare la soluzione

$$\begin{aligned} &yu_x - xu_y = u^2 \\ &u(x,0) = x^2 \end{aligned}$$

Soluzione La soluzione esiste localmemte ed e' unica purché $s \neq 0$. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t,s) = y \\ &\frac{d}{dt}y(t,s) = -x \\ &\frac{d}{dt}z(t,s) = z^2 \\ &x(0,s) = s \qquad y(0,s) = 0 \qquad z(0,s) = s^2 \end{aligned} \tag{1}$$

La soluzione é

$$x(t,s) = s\cos t \qquad\qquad y(t,s) = -s\sin t$$

$$z(t,s) = \frac{s^2}{(1 - ts^2)}$$

Si ottiene $x^2 + y^2 = s^2$ e $t = -\arctan\frac{y}{x}$.
Sostituendo si ottiene

$$u(x,y) = z(t(x,y), s(x,y)) = \frac{x^2 + y^2}{[1 + arctan\frac{y}{x}(x^2 + y^2)]}$$

Esercizio 3 (8 punti)
Si determini la soluzione $u(x,t)$ di

$$\begin{aligned} &u_{xx} + e^{-t}e^{-x^2}\sin x = u_t \qquad\qquad 0 < x; \qquad t > 0 \\ &u(0,t) = 0 \qquad t > 0 \\ &u(x,0) = xe^{-x^2} \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

Si discuta il comportamento in funzione di t di

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^2(x,t)dx$$

Soluzione Poiché nell'origine abbiamo $u(0,t) = 0$ si estende il problema in $\mathbb{R}$ estendendo in modo dispari i dati del problema di partenza.

Sia $v(x,t)$ la soluzione di

$$v_{xx} + e^{-t}e^{-x^2}\sin x = v_t \qquad x \in \mathbb{R}; \qquad t > 0$$

$$v(x,0) = xe^{-x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

La soluzione é

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} ye^{-y^2}dy + \int_0^t dse^{-s}\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4s}}e^{-y^2}\sin y dy$$

Si noti che $v(0,t) = 0$ per ogni $t \geq 0$. Quindi la soluzione per $x > 0$ é data da

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}+} ye^{-y^2}\left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}}\right]dy$$
$$+ \int_0^t dse^{-s}\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\int_{\mathbb{R}+}\left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4s}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4s}}\right]e^{-y^2}\sin y dy$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^\infty u_t(x,t)u(x,t)dx = \int_0^\infty \left[u_{xx} + e^{-t}e^{-x^2}\sin x\right]u(x,t)dx$$
$$= -\int_0^\infty u_x^2(x,t)dx + e^{-t}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin x u(x,t)dx$$

Il primo termine é sempre negativo, il secondo non ha segno definito, sebbene é possibile stimarlo. $\frac{d}{dt}E(t)$ non ha quindi segno definito.

Esercizio 4 (8 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{array}{lll} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 2 & 0 < t \\ u(x,0) = x & u_t(x,0) = 0 & 0 < x < 2 \\ u_x(0,t) = 0 & u(2,t) = 1 & 0 < t \end{array}$$

Si discuta, inoltre, la dipendenza dal tempo di

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^2 [u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t)]dx$$

Soluzione Si cerca las soluzione $u(x,t) = 1 + v(x,t)$ con $v(x,t)$ soluzione di

$$\begin{array}{lll} v_{tt} = v_{xx} & 0 < x < 2 & 0 < t \\ v(x,0) = x - 1 & v_t(x,0) = 0 & 0 < x < 2 \\ v_x(0,t) = 0 & v(2,t) = 0 & 0 < t \end{array}$$

Si pone

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\cos\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2}x$$

con $c_n(t)$ soluzione di

$$c_n''(t) = -[\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2}]^2 c_n(t)$$
$$c_n(0) = a_n \qquad c_n'(0) = 0$$

con

$$a_n = \int_0^2 (x-1)\cos\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2}x dx$$

La soluzione si trova facilmente

$$c_n(t) = a_n \cos[\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2}]t$$

Quindi la soluzione é data da

$$u(x,t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos[\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2}]t \cos\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2}x$$

Si ha

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^2 [u_x(x,t)u_{xt}(x,t) + u_t(x,t)u_{tt}(x,t)]dx$$
$$= \int_0^2 u_t[-u_{xx} + u_{tt}]dx + [u_x(2,t)u_t(2,t) - u_x(0,t)u_t(0,t)] = 0$$

infatti $u(2,t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ implica $u_t(2,t) = 0$ per ogni $t \geq 0$. L'energia si conserva.