Tutorato di FM1

26 marzo 2002

1. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = 2y(x-1)$$
$$\dot{y} = -y^2 + 2x - 1$$

(a) verificare che la funzione $H(x,y) = (y^2 - x)(x-1)$ è una costante del moto, determinare i punti critici e la loro natura;

(b) analizzare le curve di livello e determinare i dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche;

(c) verificare che l' insieme $\{(a^2, a) : a \in \mathbb{R}\}$ è invariante e calcolare esplicitamente le soluzioni $(x(t), y(t))$ che giacciono su tale insieme.

2. Dato il sistema:

$$\dot{x} = 2xy$$
$$\dot{y} = -y^2 - 3x^2 + 1$$

(a) verificare che la funzione $H(x,y) = x(x^2 + y^2 - 1)$ è una costante del moto, determinare i punti critici e la loro natura,

(b) disegnare il ritratto di fase e determinare le orbite periodiche

(c) verificare che il periodo dell' orbita passante per $(1/2, 0)$ è maggiore di 1

(d) per il sistema ottenuto aggiungendo al campo vettoriale la funzione $G(x,y) = -\alpha\,(x, 0)$ dimostrare che il cerchio unitario è positivamente invariante.

3. Dato il sistema:

$$\dot{x} = 2y - \sin x$$
$$\dot{y} = y \cos x$$

(a) determinare una costante del moto $H(x,y)$ tale che $H(0,0)=0$

(b) determinare i punti critici e la loro natura

(c) dimostrare che il tempo che la soluzione che parte da $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$ impiega a raggiungere $(3\pi/4, \sqrt{2}/2)$ è compreso tra $\pi/2$ e $\pi\sqrt{2}/2$.

4. Dato il sistema:

$$\dot{x} = -4y + 10x^2y + 6y^3$$
$$\dot{y} = 4x - 10y^2x - 6x^3$$

(a) verificare che la funzione $H(x,y) = \frac{1}{2}(3x^2+y^2-1)(3y^2+x^2-1)$ è una costante del moto, determinare i punti critici e la loro natura,

(b) per il sistema ottenuto aggiungendo al campo vettoriale la funzione $G(x,y) = -\alpha\left(x - \sqrt{2/3}, y\right)$ individuare una regione chiusa del piano positivamente invariante che contenga la sola posizione di equilibrio $\left(0, \sqrt{2/3}\right)$.