

**Corso di laurea in Matematica**  
**Sistemi dinamici – Primo Modulo**

PROVA D'ESAME DELL' 01-02-2000

ESERCIZIO 1. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 - 1)(3y^2 - 1) , \\ \dot{y} = -y(y^2 - 1)(3x^2 - 1) . \end{cases}$$

- (1.1) Trovare una costante del moto  $H(x, y)$ .
- (1.2) Determinare i punti d'equilibrio.
- (1.3) Discuterne la stabilità.
- (1.4) Studiare qualitativamente le curve di livello.
- (1.5) Individuare i dati iniziali che generano traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2. Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove in senso antiorario lungo l'ellisse di semiassi di lunghezza  $a = 2$  e  $b = 1$  e centro l'origine  $O = (0, 0)$  nel piano  $(x, y)$ , orientata in modo che l'asse maggiore risulti parallelo all'asse  $x$ .

L'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene sempre parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$  e  $K$  ruota intorno all'asse  $\zeta$  con velocità angolare costante  $\omega$  in senso antiorario. All'istante iniziale  $t = 0$  il punto  $O'$  occupa la posizione  $\mathbf{q}_{O'} = (2, 0, 0)$  e gli assi  $\xi$  e  $\eta$  sono diretti come gli assi  $x$  e  $y$ , rispettivamente.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove lungo l'asse  $\xi$  con legge oraria  $\xi(t) = vt$ , con  $v$  costante positiva.

- (2.1) Scrivere la trasformazione rigida  $D: K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , *i.e.*  $D = CB$ , e determinare  $C$  e  $B$ .
- (2.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto  $\mathbf{q}(t)$  nel sistema assoluto e  $\mathbf{Q}(t)$  nel sistema mobile.
- (2.3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$ .
- (2.4) Determinare la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .
- (2.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .
- (2.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .
- (2.7) Determinare la forza di Coriolis  $\mathbf{F}_2$  che agisce sul punto  $P$ .