

**Corso di laurea in Matematica**  
**Sistemi dinamici – Primo Modulo**

PROVA D'ESAME DEL 7-10-99

Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - (x^2 - 1)^2 - 1, \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1)(y - 1). \end{cases}$$

- (1) Verificare che esiste una costante del moto  $H(x, y)$  e determinarla.
- (2) Individuare i punti critici e discuterne la stabilità.
- (3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi e discuterne qualitativamente la forma.
- (4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche. Dimostrare in particolare che la traiettoria con dato iniziale  $(1, 3/4)$  è periodica e scriverne il periodo come integrale definito.
- (6) Trovare esplicitamente la soluzione  $(x(t), y(t))$  con dati iniziali  $(1, 1)$  e discuterne il comportamento asintotico per  $t \rightarrow \pm\infty$ .
- (7) Come al punto precedente per la traiettoria con dati iniziali  $(9, 2)$ .