

Corso di laurea in Matematica
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

SCRITTO (03-06-2002)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 1, \\ \dot{y} = f(x, y), \end{cases}$$

dove

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left[2 \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 1\right], & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

e si definisca

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(1.1) Verificare che la funzione

$$H(x, y) = (y - \varepsilon(x))(y - 1 + \varepsilon(x))$$

è una costante del moto.

(1.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(1.3) Analizzare le curve di livello di $H(x, y)$ nel piano: determinarne qualitativamente la forma e discuterne il verso di percorrenza.

(1.4) Caratterizzare analiticamente l'insieme \mathcal{A} dei dati iniziali (\bar{x}, \bar{y}) che generano traiettorie periodiche.

(1.5) Verificare che il dato iniziale $(1/\sqrt{\log 4}, 1/2)$ appartiene all'insieme \mathcal{A} .

ESERCIZIO 2. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove nel piano (x, y) lungo il profilo $y(x) = \frac{\sin x}{x}$; la componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge $x_{O'}(t) = t$.

L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ , mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$.

Un punto materiale P di massa $m = 1$ è fissato nella posizione $(1, 0, 0)$ nel sistema di riferimento K .

(2.1) Scrivere la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , i.e. $D = CB$, e determinare C e B .

(2.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.

(2.3) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .

(2.4) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .

(2.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(2.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(2.7) Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P .

(2.8) Determinare la forza centrifuga che agisce sul punto P .