

**Corso di laurea in Matematica**  
**Sistemi dinamici – Primo Modulo**

PROVA D'ESAME 03-09-01

ESERCIZIO. Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 2(1 - \cos x) + \cos 2x,$$

con  $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$ .

- (1) Si studi la funzione  $V(x)$ ;
- (2) Scrivere le equazioni del corrispondente sistema dinamico planare, e discuterne qualitativamente le curve di livello dell'energia

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x), \quad y = \dot{x},$$

nel piano  $(x, y)$ ;

- (3) Determinare tutti i dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche;
- (4) Dimostrare che la traiettoria con dato iniziale  $(x, \dot{x}) = (-2\pi/3, 0)$  è periodica;
- (5) Scrivere il periodo della traiettoria del punto precedente come integrale definito.