

**Corso di laurea in Matematica**  
**Sistemi dinamici – Primo Modulo**

PROVA D'ESONERO DEL 28-01-99

CORREZIONE

(1) In termini delle coordinate lagrangiane suggerite nel testo, le coordinate cartesiane dei punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$  sono date da

$$\begin{aligned} P_1 &= (\sin \theta_1, 1 - \cos \theta_1), & P_2 &= (\sin \theta_2, 1 - \cos \theta_2), \\ P_3 &= (x_1, 0), & P_4 &= (x_2, 0), & P_5 &= (0, y). \end{aligned}$$

Le corrispondenti velocità sono quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (\cos \theta_1 \dot{\theta}_1, \sin \theta_2 \dot{\theta}_2), & \mathbf{v}_2 &= (\cos \theta_2 \dot{\theta}_2, \sin \theta_2 \dot{\theta}_2), \\ \mathbf{v}_3 &= (\dot{x}_1, 0), & \mathbf{v}_4 &= (\dot{x}_2, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, \dot{y}). \end{aligned}$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2} [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2]$$

e l'energia potenziale è

$$\begin{aligned} U &= mg(1 - \cos \theta_1) + mg(1 - \cos \theta_2) + mgy \\ &+ \frac{k}{2} \{ [(\sin \theta_1 - x_1)^2 + (1 - \cos \theta_1)^2] + [(\sin \theta_2 - x_2)^2 + (1 - \cos \theta_2)^2] + [x_1^2 + y^2] + [x_2^2 + y^2] \} \end{aligned}$$

che si può riscrivere, trascurando i termini costanti,

$$U = mg(y - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) + k[x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1 \sin \theta_1 - \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_2 - \cos \theta_2].$$

Quindi la lagrangiana del sistema è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - U = \frac{m}{2} [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2] \\ &- mg(y - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) - k[x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1 \sin \theta_1 - \cos \theta_1 - x_2 \sin \theta_2 - \cos \theta_2]. \end{aligned}$$

Per ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange, si calcolano le derivate parziali  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$  e  $\partial \mathcal{L} / \partial q$  e si pone  $d/dt[\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}] = \partial \mathcal{L} / \partial q$ , se  $q$  denota la generica coordinata lagrangiana. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= m\dot{\theta}_1, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m\dot{\theta}_2, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} &= m\dot{x}_1, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} &= m\dot{x}_2, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= -mg \sin \theta_1 + kx_1 \cos \theta_1 - k \sin \theta_1, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= -mg \sin \theta_2 + kx_2 \cos \theta_2 - k \sin \theta_2, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= -2kx_1 + k \sin \theta_1, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= -2kx_2 + k \sin \theta_2, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= -2ky - mg, \end{aligned}$$

e se ne deduce quindi

$$\begin{cases} m\ddot{\theta}_1 = -mg \sin \theta_1 + kx_1 \cos \theta_1 - k \sin \theta_1, \\ m\ddot{\theta}_2 = -mg \sin \theta_2 + kx_2 \cos \theta_2 - k \sin \theta_2, \\ m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k \sin \theta_1, \\ m\ddot{x}_2 = -2kx_2 + k \sin \theta_2, \\ m\ddot{y} = -2ky - mg. \end{cases}$$

(2) I punti d'equilibrio sono i punti stazionari del potenziale. Si devono quindi trovare i valori  $(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, y)$  tali che siano nulle le derivate del potenziale  $U$ . Imponiamo perciò:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \theta_1} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = mg \sin \theta_1 - kx_1 \cos \theta_1 + k \sin \theta_1 = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = mg \sin \theta_2 - kx_2 \cos \theta_2 + k \sin \theta_2 = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2kx_1 - k \sin \theta_1 = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2kx_2 - k \sin \theta_2 = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2ky + mg = 0.\end{aligned}$$

L'ultima equazione dà

$$y = -\frac{mg}{2k} \equiv -y_0,$$

mentre dalla terza e dalla quarta si ricavano le relazioni

$$2x_1 = \sin \theta_1, \quad 2x_2 = \sin \theta_2,$$

che, introdotte nelle prime due equazioni, danno due equazioni chiuse, rispettivamente per  $\theta_1$  e per  $\theta_2$ . Le due equazioni sono uguali, a meno dello scambio di  $\theta_1$  con  $\theta_2$ : è quindi sufficiente studiarne una. Consideriamo, per esempio, l'equazione per  $\theta_1$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \frac{\sin \theta_1}{2} [2(mg + k) - k \cos \theta_1] = 0$$

che, per essere soddisfatta, richiede  $\sin \theta_1 = 0$ , dal momento che l'equazione

$$\cos \theta_1 = \frac{2(mg + k)}{k}$$

non ammette soluzione poiché  $2mg + k > k$ , mentre  $|\cos \theta_1| \leq 1$ .

Quindi saranno possibili solo le soluzioni  $\sin \theta_1 = 0$ , che implicano  $\theta_1 = 0$  oppure  $\theta_1 = \pi$ .

Analogamente la condizione di annullamento per la derivata di  $U$  rispetto a  $\theta_2$  porta a  $\theta_2 = 0$  oppure  $\theta_2 = \pi$ .

In conclusione abbiamo 4 configurazioni d'equilibrio:

$$\begin{aligned}(Q_1) \quad & \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y = -y_0, \\ (Q_2) \quad & \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y = -y_0, \\ (Q_3) \quad & \theta_1 = \pi, \theta_2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y = -y_0, \\ (Q_4) \quad & \theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad y = -y_0,\end{aligned}$$

che corrispondono alle 4 configurazioni rappresentate in Figura 1.

Per discutere la stabilità delle posizioni d'equilibrio trovate occorre studiare la matrice hessiana. Il sistema sotto studio è un sistema a 5 gradi di libertà. È tuttavia immediato notare che la lagrangiana si separa nella somma di tre lagrangiane indipendenti

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, y, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}) = \mathcal{L}_1(\theta_1, x_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_1) + \mathcal{L}_2(\theta_2, x_2, \dot{\theta}_2, \dot{x}_2) + \mathcal{L}_3(y, \dot{y}),$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= T_1 - U_1 = \frac{m}{2}[\dot{\theta}_1^2 + \dot{x}_1^2] + mg \cos \theta_1 - k[x_1^2 - x_1 \sin \theta_1 - \cos \theta_1] , \\ \mathcal{L}_2 &= T_2 - U_2 = \frac{m}{2}[\dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_2^2] + mg \cos \theta_2 - k[x_2^2 - x_2 \sin \theta_2 - \cos \theta_2] , \\ \mathcal{L}_3 &= T_3 - U_3 = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy - ky^2 ,\end{aligned}$$

con ovvio significato dei simboli.

Quindi è sufficiente studiare i tre sistemi disaccoppiati così ottenuti e trovare i corrispondenti punti d'equilibrio stabili e instabili. Inoltre, visto che la lagrangiana  $\mathcal{L}_2$  si ottiene semplicemente da  $\mathcal{L}_1$  per scambio di  $(\theta_1, x_1)$  con  $(\theta_2, x_2)$ , basta studiare le lagrangiane  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_3$ .

Per  $\mathcal{L}_3$  si ottiene

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} = 2k > 0 ,$$

da cui possiamo concludere che il punto  $y = y_0$  è un punto di minimo per il potenziale e quindi  $(y, \dot{y}) = (y_0, 0)$  è una posizione d'equilibrio stabile per  $\mathcal{L}_3$ .

Per  $\mathcal{L}_1$  si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{11}(\theta_1, x_1) &\equiv \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta_1^2} = mg \cos \theta_1 + k \cos \theta_1 + kx_1 \sin \theta_1 , \\ \mathcal{H}_{12}(\theta_1, x_1) &\equiv \mathcal{H}_{21}(\theta_1, x_1) = \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta_1 \partial x_1} = -k \cos \theta_1 , \\ \mathcal{H}_{22}(\theta_1, x_1) &\equiv \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} = 2k ,\end{aligned}$$

e quindi la matrice hessiana corrispondente è

$$\mathcal{H}(\theta_1, x_1) = \begin{pmatrix} mg \cos \theta_1 + k \cos \theta_1 + kx_1 \sin \theta_1 & -k \cos \theta_1 \\ -k \cos \theta_1 & 2k \end{pmatrix} .$$

Ne segue che

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} mg + k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} ,$$

così che

$$\det \mathcal{H}(0, 0) = 2mgk + k^2 > 0 , \quad \mathcal{H}_{11}(0, 0) = mg + k > 0 ,$$

quindi  $(\theta_1, x_1) = (0, 0)$  è un punto di minimo per il potenziale. Allo stesso modo

$$\mathcal{H}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} -mg - k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} ,$$

così che

$$\det \mathcal{H}(\pi, 0) = -2mgk - 3k^2 < 0 ,$$

quindi  $(\theta_1, x_1) = (\pi, 0)$  è un punto di sella per il potenziale.

Ragionando analogamente per  $\mathcal{L}_2$  si trova che l'unica configurazione d'equilibrio stabile per  $\mathcal{L}$  è quella in cui ognuno dei tre sistemi lagrangiani  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_3$  ammette posizioni d'equilibrio stabile, *i.e.*

$$(Q_1) \quad (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (0, 0, 0, 0, y_0) , \quad y_0 = -\frac{mg}{2k} ,$$

mentre le altre possibili configurazioni d'equilibrio

$$(Q_2) \quad (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (\pi, 0, 0, 0, y_0) , \quad y_0 = -\frac{mg}{2k} ,$$

$$(Q_3) \quad (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (0, 0, \pi, 0, y_0) , \quad y_0 = -\frac{mg}{2k} ,$$

$$(Q_4) \quad (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (\pi, 0, \pi, 0, y_0) , \quad y_0 = -\frac{mg}{2k} .$$

sono instabili.

(3) Poiché  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ , per le piccole oscillazioni possiamo considerare separatamente i tre sistemi lagrangiani. Come segue dal punto precedente, esiste un'unica posizione d'equilibrio stabile: dovremo quindi studiare le piccole oscillazioni intorno a tale posizione. Occorre quindi sviluppare fino al secondo ordine  $\mathcal{L}_1$  nell'intorno di  $(\theta_1, x_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_1) = (0, 0, 0, 0)$ ,  $\mathcal{L}_2$  nell'intorno di  $(\theta_2, x_2, \dot{\theta}_2, \dot{x}_2) = (0, 0, 0, 0)$  e  $\mathcal{L}_3$  nell'intorno di  $(y, \dot{y}) = (y_0, 0)$ .

Per  $\mathcal{L}_1$  otteniamo quindi, se  $z = (\theta_1, x_1)$ , a meno di ordini superiori al secondo,

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \langle \dot{z}, A\dot{z} \rangle - \frac{1}{2} \langle z, Bz \rangle ,$$

dove  $A$  e  $B$  sono due matrici  $2 \times 2$  date da

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} , \quad B = \mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} mg + k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} .$$

L'equazione caratteristica per la determinazione delle frequenze proprie è allora

$$\det(B - \lambda A) = m^2 \lambda^2 - m(3k + g)\lambda + 2k(mg + k) - k^2 = 0 ,$$

che, per  $m = g = k = 1$ , dà

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 ,$$

le cui radici sono dunque  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 3$ .

Le frequenze proprie sono allora

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1 , \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3} .$$

Le direzioni dei modi normali  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono tali che

$$(B - \lambda_j)\xi_j = \mathbf{0} , \quad j = 1, 2 ,$$

ovvero (tenendo conto che  $m = g = k = 1$ )

$$(2 - \lambda_1)\xi_{11} - \xi_{12} = \xi_{11} - \xi_{12} = 0 , \quad (2 - \lambda_2)\xi_{11} - \xi_{12} = -\xi_{11} - \xi_{12} = 0 ;$$

quindi

$$\xi_1 = (1, 1) , \quad \xi_2 = (-1, 1) .$$

Nella base  $(\xi_1, \xi_2)$  le equazioni del moto sono

$$\ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1 , \quad \ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2 ,$$

che ammettono soluzioni

$$Q_1(t) = a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t , \\ Q_2(t) = a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t ,$$

dove le costanti  $a_1, a_2, b_1, b_2$  dipendono dai dati iniziali nel modo seguente:

$$a_1 = Q_1(0) , \quad b_1 = \frac{\dot{Q}_1(0)}{\omega_1} , \quad a_2 = Q_2(0) , \quad b_2 = \frac{\dot{Q}_2(0)}{\omega_2} ,$$

Introducendo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

così che

$$Q_1(0) = \frac{\theta_1(0) + x_1(0)}{2}, \quad \dot{Q}_1(0) = \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2},$$

$$Q_2(0) = \frac{-\theta_1(0) + x_1(0)}{2}, \quad \dot{Q}_2(0) = \frac{-\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2},$$

che permette di esprimere i dati iniziali nelle variabili  $(Q_1, Q_2)$  in termini dei dati iniziali nelle variabili  $(\theta_1, x_1)$ .

In conclusione

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_1(0) + x_1(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2} \sin t + \frac{\theta_1(0) - x_1(0)}{2} \cos \sqrt{3}t + \frac{\dot{\theta}_1(0) - \dot{x}_1(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,$$

$$x_1(t) = \frac{\theta_1(0) + x_1(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2} \sin t - \frac{\theta_1(0) - x_1(0)}{2} \cos \sqrt{3}t - \frac{\dot{\theta}_1(0) - \dot{x}_1(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,$$

e, analogamente, si trova per  $\mathcal{L}_2$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_2(0) + x_2(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_2(0) + \dot{x}_2(0)}{2} \sin t + \frac{\theta_2(0) - x_2(0)}{2} \cos \sqrt{3}t + \frac{\dot{\theta}_2(0) - \dot{x}_2(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,$$

$$x_2(t) = \frac{\theta_2(0) + x_2(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_2(0) + \dot{x}_2(0)}{2} \sin t - \frac{\theta_2(0) - x_2(0)}{2} \cos \sqrt{3}t - \frac{\dot{\theta}_2(0) - \dot{x}_2(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,$$

vista la completa simmetria tra  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ .

Per  $\mathcal{L}_3$  abbiamo, a meno di costanti,

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2} \dot{y}^2 - (y - y_0)^2,$$

e quindi la frequenza propria del sistema risulta essere

$$\omega_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{2},$$

così che

$$y(t) = y_0 + y(0) \cos \sqrt{2}t + \frac{\dot{y}(0)}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t.$$

In particolare la scelta dei dati iniziali data nel testo implica, in termini delle variabili lagrangiane,

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) = x_1(0) = x_2(0) = y(0) - y_0 = 0,$$

$$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{y}(0) = 0,$$

$$\dot{x}_1(0) = u, \quad \dot{x}_2(0) = w,$$

da cui segue

$$\theta_1(t) = \frac{u}{2} \sin t - \frac{u}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,$$

$$x_1(t) = \frac{u}{2} \sin t + \frac{u}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,$$

$$\theta_2(t) = \frac{w}{2} \sin t - \frac{w}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,$$

$$x_2(t) = \frac{w}{2} \sin t + \frac{w}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t,$$

$$y(t) = y_0 = -\frac{mg}{2k} = -\frac{1}{2},$$

(4) Per trovare le reazioni vincolari che agiscono sul punto  $P_3 = (x_3, y_3)$  si considerano le equazioni

$$\begin{cases} m\ddot{x}_3 = F_x^{(3)} + R_x^{(3)}, \\ m\ddot{y}_3 = F_y^{(3)} + R_y^{(3)}, \end{cases}$$

dove, tenendo conto del vincolo, si ha  $P_3 = (x_3, y_3) = (x_1, 0)$ . Quindi

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_3 &= m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k \sin \theta_1, \\ m\ddot{y}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Per il Principio di d'Alembert si deve inoltre avere

$$\mathbf{R}^{(3)} \equiv (R_x^{(3)}, R_y^{(3)}) = (0, R_y^{(3)}).$$

Consideriamo la configurazione indicata nel testo:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad y = y_0,$$

corrispondente alla situazione rappresentata in Figura 2.

Per calcolare le forze che agiscono sul punto  $P_3$  in tale configurazione, occorre considerare le forze attive  $(F_x^{(3)}, F_y^{(3)})$  che agiscono sul punto  $P_3$ .

Si ha

$$F_x^{(3)} = -kx_3 = -k, \quad F_y^{(3)} = ky_0 + k - mg = -\frac{mg}{2} + k - mg = k - \frac{3mg}{2}.$$

Sempre nella configurazione considerata si ha

$$\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k \sin \theta_1 = -2k + k = -k,$$

così che risulta

$$R_x^{(3)} = -F_x^{(3)} + m\ddot{x}_3 = -F_x^{(3)} + m\ddot{x}_1 = k - k = 0,$$

che era ovvio a priori, come già anticipato, e

$$R_y^{(3)} = -F_y^{(3)} + m\ddot{y}_3 = \frac{3mg}{2} - k,$$

che dunque esprime la reazione vincolare sul punto  $P_3$ .

Alternativamente si poteva calcolare la forza attiva sul punto  $P_3$  considerando il potenziale

$$U = \frac{1}{2}k[(1-x_3)^2 + (1-y_3)^2 + x_3^2 + (y_3-y_0)^2] + mgy_3 + \text{termini indipendenti da } x_3, y_3$$

e ottenendo la forza come gradiente, cambiato di segno, di  $U$ , calcolato in  $(x_3, y_3) = (1, 0)$ . Quindi

$$F_x^{(3)} = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = k[(1-x_3) - x_3], \quad F_y^{(3)} = -\frac{\partial U}{\partial y_3} = k[(1-y_3) - (y_3-y_0)] - mg,$$

che, calcolato in  $(x_3, y_3) = (1, 0)$  dà ovviamente il risultato precedente.

(5) Si i punti  $P_1$  e  $P_2$  sono fissati come indicato nel testo, poiché si può tener conto della forza centrifuga che agisce sui punti  $P_3$  e  $P_4$  attraverso l'introduzione di un potenziale

$$U_0 = -\frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2),$$

la lagrangiana che descrive il sistema diventa

$$\mathcal{L} = T - U \frac{m}{2} [\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2] - [mgy + k(x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1 + x_2) + U_0] ,$$

così che si può scrivere

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, y, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}) = \mathcal{L}_1(x_1, \dot{x}_1) + \mathcal{L}_2(x_2, \dot{x}_2) + \mathcal{L}_3(y, \dot{y}) ,$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x_1, \dot{x}_1) &= \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 - kx_1^2 + kx_1 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 , \\ \mathcal{L}_2(x_2, \dot{x}_2) &= \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - kx_2^2 - kx_2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 , \\ \mathcal{L}_3(y, \dot{y}) &= \frac{m}{2} \dot{y}^2 - mgy - ky^2 , \end{aligned}$$

Le posizioni d'equilibrio sono quindi date dalle soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 2kx_1 - k - m\omega^2 x_1 = 0 , \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= 2kx_2 - k - m\omega^2 x_2 = 0 , \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 2ky + mg = 0 ; \end{aligned}$$

si ha quindi una sola posizione d'equilibrio, data da

$$(Q) \quad x_1 = \frac{k}{\alpha} , \quad x_2 = -\frac{k}{\alpha} , \quad y = y_0 = -\frac{mg}{2k} ,$$

purché

$$\alpha = 2k - m\omega^2 \neq 0 .$$

Per discutere la stabilità occorre considerare le derivate seconde dell'energia potenziale dei tre sistemi lagrangiani indipendenti ottenuti. Si ha, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} &= 2k - m\omega^2 , \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} &= 2k - m\omega^2 , \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 2k > 0 , \end{aligned}$$

da cui si vede che la posizione d'equilibrio trovata è stabile se  $\alpha > 0$ , *i.e.* se  $2k > m\omega^2$ , e instabile se  $\alpha < 0$ , *i.e.* se  $2k < m\omega^2$ .

Il caso  $\alpha = 0$  va discusso a parte. Se  $\alpha = 0$ , si vede che l'energia potenziale diventa

$$U = kx_1 - kx_2 - mgy - ky^2 ,$$

e quindi  $\partial U / \partial x_1 = k$  e  $\partial U / \partial x_2 = -k$ , così che il sistema non ammette alcuna posizione d'equilibrio.

In conclusione, per  $\alpha < 0$  esiste la posizione d'equilibrio instabile (Q), per  $\alpha = 0$  non esistono posizioni d'equilibrio e per  $\alpha > 0$  esiste la posizione d'equilibrio stabile (Q); ved. la Figura 3.

(6) Per determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto  $P_3$ , si considera, come al punto (4),

$$\begin{cases} m\ddot{x}_3 = F_x^{(3)} + R_x^{(3)} , \\ m\ddot{y}_3 = F_y^{(3)} + R_y^{(3)} , \end{cases}$$

dove, tenendo conto del vincolo, si ha  $P_3 = (x_3, y_3) = (x_1, 0)$ .

Quello che cambia rispetto al caso precedente è che la forza ha ora anche un contributo  $m\omega^2 x_3$  alla componente orizzontale (lungo l'asse  $x$ ) dovuto alla forza centrifuga e la posizione del punto  $P_5$  non è fissata a  $y_0$ . Poiché per il Principio di d'Alembert la reazione vincolare deve essere ortogonale al vincolo e la componente della forza nella direzione verticale non è modificata dalla forza centrifuga possiamo concludere che, nella configurazione del punto (4), la reazione vincolare è esattamente quella calcolata al punto (4).

Se inoltre notiamo che la componente  $F_y^{(3)}$  della forza non dipende dalla posizione  $x_3$ , otteniamo che la reazione vincolare è, per ogni valore di  $x_3$ , data da

$$\mathbf{R}^{(3)} = (R_x^{(3)}, R_y^{(3)}) = (0, k - ky - mg) .$$

Questo in ogni caso si può verificare esplicitamente notando che

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_3 &= m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k + m\omega^2 x_1 , \\ m\ddot{y}_3 &= 0 , \end{aligned}$$

mentre, per le forze attive, abbiamo

$$\begin{aligned} F_x^{(3)} &= -kx_3 + m\omega^2 x_3 - k(x_3 - 1) = -2kx_3 + m\omega^2 x_3 + k , \\ F_y^{(3)} &= -ky + k - mg = -\frac{mg}{2} + k - mg = k - ky - \frac{mg}{2} , \end{aligned}$$

così che si vede che il valore di  $F_x^{(3)}$  dipende da  $x_3$  ma non contribuisce alla reazione vincolare, poiché  $F_x^{(3)} = m\ddot{x}_3$ , mentre

$$R_y^{(3)} = -F_y^{(3)} + m\ddot{y}_3 = \frac{mg}{2} - k + ky ,$$

che è indipendente da  $x_3$ .



