

Secondo Esonero di CP2
15 gennaio 2002

Esercizio 1 a) Siano X_1, \dots, X_n v.a. i.i.d. con legge $\text{Po}(\lambda)$ ¹. Dimostrare che $S_n := \sum_{k=0}^n X_k \sim \text{Po}(n\lambda)$.

b) Sia $g \in C_b(\mathbb{R})$. Dimostrare che, per ogni $\lambda > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = g(\lambda).$$

Esercizio 2 Siano X e Y v.a. i.i.d., con legge $\text{Un}(0, 1)$, e siano $U = \min(X, Y)$ e $V = \max(X, Y)$.

a) Calcolare, se esistono, la densità congiunta di U e V e le rispettive densità marginali.

b) Le v.a. U e V sono indipendenti?

c) Per $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare $\mathbb{P}(U + \alpha > V)$.

d) Sia $W = Y - X$. La v.a. (su \mathbb{R}^3) (U, V, W) ha densità?

Esercizio 3 Sia $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti tali che $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n = 1 - \mathbb{P}(X_n = n^\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato. Studiare la convergenza q.c., in probabilità, in L^p e in legge di $\{X_n\}_n$. Cosa cambia se si elimina l'ipotesi di indipendenza?

Esercizio 4 Sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d., uniformi sull'insieme $\{0, 1, \dots, 9\}$. Per $n \geq 1$, sia $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k 10^{-k}$. Usando le funzioni caratteristiche, dimostrare che X_n converge in legge ad una v.a. uniforme su $[0, 1]$. Dedurre poi che esiste una v.a. $Z \sim \text{Un}(0, 1)$ tale che $X_n \rightarrow Z$ q.c.

Esercizio 5 a) È vero che se esiste la densità congiunta allora esistono anche le densità marginali? Ed è vero il viceversa? (Giustificare le risposte.)

b) È vero che da una qualsiasi successione di v.a. si può estrarre una sottosuccessione che converge in legge? (Giustificare la risposta.)

c) Enunciare, dimostrare in grandi linee e dare un esempio di applicazione della Legge dei Grandi Numeri **oppure** del Teorema del Limite Centrale.

¹Si ricorda che $X \sim \text{Po}(\mu)$ se $\mathbb{P}(X = j) = \frac{\mu^j}{j!} e^{-\mu}$, con $j = 0, 1, \dots$

Soluzioni

Esercizio 1 a) Se $X \sim \text{Po}(\mu)$, la sua f.c. è

$$\varphi(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\theta k} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu e^{i\theta})^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu e^{i\theta}} = e^{\mu(e^{i\theta}-1)}. \quad (1)$$

Allora, ricordando che $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$, con X_k indipendenti $\text{Po}(\lambda)$,

$$\varphi_{S_n}(\theta) = \prod_{k=0}^n \varphi_{X_k}(\theta) = \left(e^{\lambda(e^{i\theta}-1)} \right)^n = e^{n\lambda(e^{i\theta}-1)}$$

e confrontando con (1) deduciamo che $S_n \sim \text{Po}(n\lambda)$. Oppure, si può dimostrare per induzione. Per $n = 1$, $S_n = X_1 \sim \text{Po}(\lambda)$. Supponiamo quindi che $S_n \sim \text{Po}(n\lambda)$ e dimostriamo che $S_{n+1} \sim \text{Po}((n+1)\lambda)$. Infatti, poiché S_n e X_{n+1} sono indipendenti, per $j = 0, 1, \dots$ usando la convoluzione si ha

$$\begin{aligned} p_{S_{n+1}}(j) &= p_{S_n + X_{n+1}}(j) = \sum_x p_{S_n}(x) p_{X_{n+1}}(j-x) = \sum_{x=0}^j \frac{(n\lambda)^x}{x!} e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{j-x}}{(j-x)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{e^{-(n+1)\lambda}}{j!} \sum_{x=0}^j \binom{j}{x} (n\lambda)^x \lambda^{j-x} = \frac{e^{-(n+1)\lambda}}{j!} (n\lambda + \lambda)^j = \frac{((n+1)\lambda)^j}{j!} e^{-(n+1)\lambda}, \end{aligned}$$

dunque $S_{n+1} \sim \text{Po}((n+1)\lambda)$.

b) La LGN assicura che $S_n/n \rightarrow \mathbb{E}(X_1) = \lambda$ q.c. per $n \rightarrow \infty$, quindi in particolare $S_n/n \rightarrow \lambda$ in legge: per ogni $g \in C_b$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \mathbb{E}(g(\lambda)) = g(\lambda).$$

Ora, osservando che

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$$

si ottiene la tesi.

Esercizio 2 a) Si ha: $(U, V) = \phi(X, Y)$, con $\phi(x, y) = (\min(x, y), \max(x, y))$ che però non è iniettiva. Poniamo allora

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) : x < y\} & \text{e per } (x, y) \in A_1, & \phi_1(x, y) = (x, y); \\ A_2 &= \{(x, y) : x > y\} & \text{e per } (x, y) \in A_2, & \phi_2(x, y) = (y, x). \end{aligned}$$

Le funzioni ϕ_1 e ϕ_2 sono ora regolari e con inversa regolare:

$$\begin{aligned} \psi_1(u, v) &:= \phi_1^{-1}(u, v) = (u, v) & \text{per } (u, v) \in \phi_1(A_1) = \{(u, v) : u < v\}; \\ \psi_2(u, v) &:= \phi_2^{-1}(u, v) = (v, u) & \text{per } (u, v) \in \phi_2(A_2) = \{(u, v) : u < v\}. \end{aligned}$$

Osservando che $\mathbb{P}((X, Y) \in A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(X \neq Y) = 1$, usando il TCV si ottiene

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y} \circ \psi_1(u, v) |\det J_{\psi_1}(u, v)| \mathbb{1}_{(u,v) \in \phi_1(A_1)} + f_{X,Y} \circ \psi_2(u, v) |\det J_{\psi_2}(u, v)| \mathbb{1}_{(u,v) \in \phi_2(A_2)} \\ &= 2 \mathbb{1}_{0 < u < v < 1}. \end{aligned}$$

Calcoliamo le due densità marginali:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int f_{U,V}(u, v) dv = 2 \mathbb{1}_{0 < u < 1} \int_u^1 dv = 2(1-u) \mathbb{1}_{0 < u < 1}, \\ f_V(v) &= \int f_{U,V}(u, v) du = 2 \mathbb{1}_{0 < v < 1} \int_0^v du = 2v \mathbb{1}_{0 < v < 1}. \end{aligned}$$

b) No, U e V non sono indipendenti. Infatti, la densità congiunta non si fattorizza nel prodotto delle densità marginali.

c) Osserviamo che $\mathbb{P}(U + \alpha > V) = \mathbb{P}(V - U < \alpha)$. Poiché $0 < V - U < 1$ q.c., possiamo subito dire che $\mathbb{P}(U + \alpha > V) = 0$ se $\alpha \leq 0$ e $\mathbb{P}(U + \alpha > V) = 1$ per $\alpha \geq 1$. Sia ora $\alpha \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U + \alpha > V) &= \int_{\{(u,v): u+\alpha > v\}} f_{U,V}(u,v) du dv = 2 \int_{\{(u,v): u+\alpha > v\}} \mathbb{1}_{0 < u < v < 1} du dv \\ &= 2 \int_0^1 du \int_u^{\min(u+\alpha, 1)} dv = 2 \int_0^{1-\alpha} du \int_u^{u+\alpha} dv + 2 \int_{1-\alpha}^1 du \int_u^1 dv \\ &= 2\alpha(1-\alpha) + \alpha^2 = \alpha(2-\alpha). \end{aligned}$$

d) La densità congiunta non esiste perché la legge congiunta di (U, V, W) non è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^3 . Infatti, si consideri, ad esempio, il boreliano di \mathbb{R}^3

$$A = \{(u, v, w) : w > 0, v - u = w\}.$$

A (è parte del grafico di una funzione continua, quindi) ha Leb₃-misura nulla ma $\mathbb{P}((U, V, W) \in A) = \mathbb{P}(W > 0, V - U = W) = \mathbb{P}(Y > X, V - U = Y - X) = \mathbb{P}(Y > X) > 0$.

Esercizio 3 X_n assume solo due valori: 0, con probabilità $1/n$, e n^α , con probabilità $1 - 1/n$, È quindi semplice calcolare la f.d. F_n di X_n :

$$F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{n} & \text{se } 0 \leq x < n^\alpha \\ 1 & \text{se } x \geq n^\alpha \end{cases}$$

Quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F_\alpha(x)$, dove: per $\alpha < 0$,

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

se $\alpha = 0$,

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1; \end{cases}$$

se invece $\alpha > 0$,

$$F_\alpha(x) \equiv 0.$$

Allora, se $\alpha > 0$ il limite delle F_n non converge ad una f.d. (la funzione limite non diventa una f.d. neanche se la si modifica su una quantità numerabile di punti), quindi in tal caso non c'è convergenza in legge, dunque nessun'altra forma di convergenza. Studiamo ora i rimanenti casi.

• $\alpha < 0$. La funzione limite F_α differisce dalla f.d. della v.a. $X = 0$ q.c. solo nel punto $x = 0$, che è il punto di salto, quindi possiamo concludere che $X_n \rightarrow 0$ in legge, dunque in probabilità. Vediamo se tale convergenza vale anche q.c.: fissato $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(X_n > \delta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{se } \delta < n^\alpha \\ 0 & \text{se } \delta \geq n^\alpha \end{cases}$$

Ora, poiché $n^\alpha \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$, per ogni n grande si ha che $\delta > n^\alpha$, dunque $\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = 0$ per ogni n grande. Ma allora la serie $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta)$ converge, e da BC1 deduciamo che $X_n \rightarrow 0$ q.c. Infine, studiamo la convergenza (ovviamente a 0) in L^p :

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = \frac{n^{\alpha p}}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

da cui segue che $X_n \rightarrow 0$ anche in L^p .

• $\alpha = 0$. La funzione limite F_0 è la f.d. della v.a. $X = 1$ q.c., quindi $X_n \rightarrow 1$ in legge, dunque in probabilità. Vediamo se tale convergenza vale anche q.c.: fissato $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(X_n > \delta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{se } \delta < 1 \\ 0 & \text{se } \delta \geq 1 \end{cases}$$

Allora la serie $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta)$ non converge, e da BC2 (ricordiamo che per ipotesi le X_n sono indipendenti) deduciamo che $X_n \not\rightarrow 1$ q.c. Infine, studiamo la convergenza (ovviamente a 1) in L^p :

$$\mathbb{E}(|X_n - 1|^p) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

da cui segue che $X_n \rightarrow 1$ in L^p .

Infine, l'ipotesi di indipendenza è stata usata solo per applicare BC2 e per dimostrare che, nel caso $\alpha = 0$, $X_n \not\rightarrow 1$ q.c.: se si elimina l'ipotesi di indipendenza, potrebbe anche essere che $X_n \rightarrow 1$ q.c., per $\alpha = 0$.

Esercizio 4 Calcoliamo la f.c. di X_n : ricordando che le Y_k sono indipendenti, si ha

$$\varphi_{X_n}(\theta) = \prod_{k=1}^n \varphi_{Y_k 10^{-k}}(\theta) = \prod_{k=1}^n \varphi_{Y_k}(10^{-k} \theta).$$

Ora,

$$\varphi_{Y_k}(t) = \varphi_{Y_1}(t) = \mathbb{E}(e^{itY_1}) = \sum_{j=0}^9 e^{itj} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{j=0}^9 (e^{it})^j = \frac{1 - e^{10it}}{10(1 - e^{it})}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \varphi_{X_n}(\theta) &= \prod_{k=1}^n \frac{1 - e^{10^{-k+1}i\theta}}{10(1 - e^{10^{-k}i\theta})} \\ &= \frac{1 - e^{10i\theta}}{10(1 - e^{10^{-1}i\theta})} \cdot \frac{1 - e^{10^{-1}i\theta}}{10(1 - e^{10^{-2}i\theta})} \cdot \frac{1 - e^{10^{-2}i\theta}}{10(1 - e^{10^{-3}i\theta})} \cdots \frac{1 - e^{10^{-n+1}i\theta}}{10(1 - e^{10^{-n}i\theta})} \cdot \frac{1 - e^{10^{-n+2}i\theta}}{10(1 - e^{10^{-n+1}i\theta})} \\ &= \frac{1 - e^{i\theta}}{10^n(1 - e^{10^{-n}i\theta})} \end{aligned}$$

Ora, per $x \sim 0$, $e^{ix} - 1 = ix + o(x)$, per ogni θ fissato, quindi per $n \rightarrow \infty$,

$$10^n(1 - e^{10^{-n}i\theta}) = -\frac{e^{10^{-n}i\theta} - 1}{10^{-n}} = -i\theta + o(10^{-n}),$$

da cui segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - 1}{i\theta}.$$

Infine, se $U \sim \text{Un}(0, 1)$ allora

$$\varphi_U(\theta) = \int_0^1 e^{i\theta u} du = \frac{e^{i\theta} - 1}{i\theta},$$

da cui segue che X_n converge in legge ad una v.a. $\text{Un}(0, 1)$.

Per dimostrare che X_n converge anche q.c., osserviamo che, per ogni ω , $X_n(\omega) = \sum_{k=1}^n Y_k(\omega) 10^{-k}$ e $Y_k(\omega) \geq 0$ per \mathbb{P} -q.o. ω , quindi $X_n(\omega)$ cresce all'aumentare di n . Inoltre, \mathbb{P} -q.o. ω ,

$$0 \leq X_n(\omega) = \sum_{k=1}^n Y_k(\omega) 10^{-k} \leq \sum_{k=1}^n 9 \cdot 10^{-k} \leq 9 \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = 1,$$

quindi $\{X_n(\omega)\}_n$ è una successione monotona non decrescente e limitata, \mathbb{P} -q.o. ω , quindi convergente. Ciò prova che esiste una v.a. Z tale che $X_n \rightarrow Z$ q.c. Inoltre, $X_n \rightarrow Z$ anche in legge, quindi per quanto già visto dev'essere $Z \sim \text{Un}(0, 1)$.

Esercizio 5 a) Sì (si rimanda agli appunti del corso per la dimostrazione). Non è vero il viceversa: si prenda ad esempio X con densità e $Y = X$. X e Y hanno densità ma la densità congiunta non esiste: la legge congiunta di (X, Y) “vive” su $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, che è un insieme di Leb_2 -misura nulla.

b) No: si prenda ad esempio la successione $X_n = n$ q.c.: nessuna sua sottosuccessione converge in legge. Infatti, per poter rispondere affermativamente occorre che la successione sia *tight*.

c) Si rimanda agli appunti del corso.