Esercizi di CP2, VI
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 Sia $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti tali che $Y_n \sim \mathrm{Exp}(n)$. Studiare la convergenza q.c., in probabilità e in L^p di $\{X_n\}_n$ a 0, dove

a) $X_n = Y_n$;

b) $X_n = \frac{n}{\log n} Y_n$;

c) $X_n = nY_n$.

Esercizio 2 Sia $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ una successione di v.a. tali che $Y_n \sim \mathrm{Un}(0, 1/n)$. Studiare la convergenza q.c., in probabilità e in L^p a 0 di $\{n^\gamma Y_n\}_n$, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Sia X_0 una v.a. e per $n \geq 1$, si ponga

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \beta$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Studiare la convergenza q.c. di $\{X_n\}_n$ al variare di α e β ed eventualmente imponendo condizioni opportune su X_0.

Esercizio 4 Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d., di media nulla, varianza 1.

a) La v.a. X_1X_2 ha media? Ha varianza? Se sì, quanto valgono?

b) Si può dire che[1] $\frac{1}{n}\Big(X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots + X_{2n-1}X_{2n}\Big)$ converge q.c.? Se sì, a cosa converge?

c) Supponiamo che $X_n \in L^8$. Discutere la convergenza q.c. delle successioni

$$\frac{1}{n}\Big(X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_n^4\Big) \qquad\qquad \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_n^4}.$$

[1] Si usi eventualmente il seguente risultato: *se $Y_1, \ldots, Y_n$ sono v.a. indipendenti che hanno media allora $Y_1 \cdots Y_n$ ha media e $\mathbb{E}(Y_1 \cdots Y_n) = \mathbb{E}(Y_1) \cdots \mathbb{E}(Y_n)$.* Tale risultato è stato dimostrato per $n = 2$ ma vale per ogni n (dimostrare! si tratta di modificare opportunamente la dimostrazione già vista per $n = 2$...).

Soluzioni

Esercizio1 a) $X_n = Y_n \geq 0$ q.c. e $\mathbb{P}(Y_n \leq y) = 1 - e^{-ny}$, se $y \geq 0$. Quindi, per $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(Y_n > \delta) = e^{-n\delta} \to 0 \quad \text{se } n \to \infty,$$

cioè $X_n \to 0$ in probabilità. Poiché $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \sum_n e^{-n\delta} < \infty$ per ogni $\delta > 0$, $X_n \to 0$ anche q.c. Fissato $p \geq 1$, studiamo la convergenza in L^p: usando la sostituzione $y = nx$, si ha

$$||X_n||_p^p = \mathbb{E}(X_n^p) = \mathbb{E}(Y_n^p) = \int_0^\infty x^p\, n\, e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n^p} \int_0^\infty y^p\, e^{-y}\, dy = \frac{C_p}{n^p}$$

avendo posto $C_p = \int_0^\infty y^p\, e^{-y}\, dy (< \infty)$. Allora, $X_n \to 0$ anche in L^p.

b) $X_n = nY_n / \log n$. Studiamo la convergenza in probabilità:

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(Y_n > \delta \log n/n) = e^{-n\delta \log n/n} = \frac{1}{n^\delta} \to 0 \quad \text{se } n \to \infty$$

per ogni $\delta > 0$, ovvero $X_n \to 0$ in probabilità. Ma $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta)$ converge se e solo se $\delta > 1$, quindi non possiamo ancora concludere che c'è convergenza q.c. Poiché inoltre le v.a. sono indipendenti, se $\delta \leq 1$ la serie diverge e allora, da BC2, si ha che $\mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) = 1$, da cui segue che $X_n \not\to 0$ q.c. Infine, se $p \geq 1$,

$$||X_n||_p^p = \mathbb{E}(X_n^p) = \left(\frac{n}{\log n}\right)^p \mathbb{E}(Y_n^p) = \left(\frac{n}{\log n}\right)^p \frac{C_p}{n^p} = \frac{C_p}{(\log n)^p}$$

quindi $X_n \to 0$ in L^p.

c) $X_n = nY_n$. Studiamo la convergenza in probabilità:

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(Y_n > \delta/n) = e^{-\delta} \not\to 0 \quad \text{se } n \to \infty$$

quindi $X_n \not\to 0$ in probabilità e, di conseguenza, X_n non converge a 0 né q.c. né in L^p.

Esercizio2 Osserviamo che se $Y_n \sim \text{Un}(0, 1/n)$ allora $0 < Y_n < 1/n$ q.c. e $0 < n^\gamma Y_n < n^{\gamma-1}$ q.c. Allora, se $\gamma - 1 < 0$, cioè $\gamma < 1$, si ha che $n^\gamma Y_n \to 0$ q.c., quindi in probabilità, e, per convergenza dominata, anche in L^p per ogni $p \geq 1$. Studiamo ora il caso $\gamma \geq 1$. Per $\delta > 0$ si ha

$$\mathbb{P}(n^\gamma Y_n > \delta) = \mathbb{P}(Y_n > \delta/n^\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta/n^\gamma \geq 1/n \\ 1 - n \cdot \delta/n^\gamma & \text{se } \delta/n^\gamma < 1/n \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta \geq n^{\gamma-1} \\ 1 - \delta/n^{\gamma-1} & \text{se } \delta < n^{\gamma-1} \end{cases}$$

Allora, per $\gamma = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^\gamma Y_n > \delta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta \geq 1 \\ 1 & \text{se } \delta < 1 \end{cases}$$

dunque $X_n \not\to 0$ in probabilità e quindi q.c. e in L^p. Se $\gamma < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^\gamma Y_n > \delta) = 1$$

per ogni $\delta > 0$, e ancora $X_n \not\to 0$ in probabilità, q.c. e in L^p.

Esercizio3 Osserviamo anzitutto che $X_n = \alpha^n X_0 + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$. Infatti, se $n = 1$ è vero. Supponendo l'uguaglianza vera per $n > 1$, si ha

$$X_{n+1} = \alpha X_n + \beta = \alpha \left(\alpha^n X_0 + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k\right) + \beta = \alpha^{n+1} X_0 + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k+1} + \beta$$

$$= \alpha^{n+1} X_0 + \beta \sum_{k=1}^{n} \alpha^k + \beta\alpha^0 = \alpha^{n+1} X_0 + \beta \sum_{k=0}^{n} \alpha^k$$

e per induzione otteniamo che $X_n = \alpha^n X_0 + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k$ per ogni n e quindi[2]

$$X_n = \begin{cases} \alpha^n X_0 + \beta \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \alpha^n \left(X_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \frac{\beta}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ X_0 + n\beta & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Se $|\alpha| < 1$ allora per ogni ω,

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0 \cdot X_0(\omega) + \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Se $\alpha = 1$ allora $X_n = X_0 + n\,\beta$, quindi converge se e solo se $\beta = 0$ e in tal caso la v.a. limite è (ovviamente) X_0.

Se $\alpha = -1$ allora $X_{2n} = X_0$ e $X_{2n+1} = -X_0 + \beta/2$, che convergono allo stesso limite se e solo se $X_0 = -X_0 + \beta$, cioè $X_0 = \beta/2$ q.c. In tal caso, $X_n = \beta/2$ q.c. per ogni n, quindi la successione converge q.c. a $\beta/2$.

Infine, se $|\alpha| > 1$ allora X_n converge q.c. se e solo se $X_0 = \beta/(1-\alpha)$ q.c., e in tal caso il limite è $\beta/1-\alpha$.

Esercizio4 a) Poiché X_1 e X_2 sono v.a. indipendenti di L^1, abbiamo visto che $X_1X_2 \in L^1$ e $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$. Poiché $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 0$, $\mathbb{E}(X_1X_2) = 0$. Analogamente, X_1^2 e X_2^2 sono v.a. indipendenti di L^1 (perché hanno varianza) quindi $X_1^2X_2^2 \in L^1$, cioè $X_1X_2 \in L^2$, e $\mathbb{E}(X_1^2X_2^2) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) = \mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2) = 1$. Allora esiste la varianza di X_1X_2 e (ricordando che $\mathbb{E}(X_1X_2) = 0$) $\mathrm{Var}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1^2X_2^2) = 1$.

b) Per $n \geq 1$, sia $Y_n = X_{2n-1}X_{2n}$. Procedendo come sopra, $Y_n \in L^2$, con $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ e $\mathrm{Var}(Y_n) = 1$. Inoltre, per $k \neq n$, esiste $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_n) = \mathbb{E}(Y_k\,Y_n) = \mathbb{E}(X_{2k-1}X_{2k}X_{2k-1}X_{2k}) = 0$ perché è il prodotto delle medie. Allora, la LFGN assicura che

$$\frac{1}{n}\Big(X_1X_2 + X_3X_4 + \ldots + X_{2k-1}X_{2k}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k \to 0 \qquad \text{q.c. per } n \to \infty.$$

c) $\{X_n^2\}_n$ e $\{X_n^4\}_n$ sono successioni di v.a. indipendenti con varianza (perché $X_n \in L^8$ per ogni n). Usando la LFGN, si ha

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 \to \mathbb{E}(X_1^2) = 1 \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^4 \to \mathbb{E}(X_1^4) \qquad \text{q.c. per } n \to \infty$$

quindi, se $X_n \neq 0$ q.c.,

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{X_1^4 + X_2^4 + \cdots + X_n^4} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^4} \to \frac{1}{\mathbb{E}(X_1^4)} \qquad \text{q.c. per } n \to \infty.$$

[2] Ricordiamo che, per $\rho \neq 1$, $\sum_{j=0}^N \rho^j = \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}$.