Esercizi di CP2, X
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 Un dado viene lanciato 900 volte e sia X il numero di volte in cui è uscito il 6.

a) Se il dado è equilibrato, quanto vale $\mathbb{P}(X > 180)$?

b) Supponiamo di sapere dell'esistenza di una partita di dadi truccati che producono il 6 con probabilità $2/9$. Per decidere se il dado è truccato, viene usata la seguente procedura: il dado viene lanciato 900 volte e lo si considera truccato se il 6 esce più di 180 volte. Qual è la probabilità che un dado truccato sia effettivamente individuato?

Esercizio 2 Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. reali, i.i.d., di media 0 e varianza 4.

a) Approssimare, per n grande, $\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} X_k > 2\Big)$.

b) Supponendo che esista $\mathbb{E}[X_1^4]$, studiare la convergenza in legge, in probabilità, q.c. e in media della successione $\Big\{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\Big\}_n$.

Esercizio 3 Una v.a. X ha legge $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (=gaussiana di media μ e varianza σ^2) se la sua densità di probabilità è della forma

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big).$$

a) Verificare che se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ allora $Z = (X-\mu)/\sigma \sim \mathrm{N}(0,1)$ e che se $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ allora $X = \sigma Z + \mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Dedurre che $\mathbb{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

b) Verificare che se $X_k \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ allora la sua f.c. è $\varphi_X(\theta) = \exp(i\theta\mu - \theta^2\sigma^2/2)$.

c) Sia X_k una successione di v.a. indipendenti, con $X_k \sim \mathrm{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$. Calcolare la f.c. di $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ e verificare che S_n è ancora una v.a. gaussiana, di media e varianza da precisare. Il TLC si può applicare a questa successione? O meglio: in questo caso è vero che $\Big(\sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k)\Big)/\sqrt{n}$ converge in legge per $n \to \infty$ ad una v.a. $\mathrm{N}(0,1)$?

Esercizio 4 **a)** Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. gaussiane, con

$$\mathbb{E}(X_n) = \mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2$$

Mostrare che $\{X_n\}_n$ converge in legge ad una v.a. gaussiana, e precisarne media e varianza.

b) Sia $\{Z_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d., di legge $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, e sia $\{X_n\}_n$ la successione definita per ricorrenza nel seguente modo[1]

$$X_0 = x \in \mathbb{R}, \qquad X_{n+1} = \alpha X_n + Z_n,$$

con $|\alpha| < 1$. Qual è la legge di X_1? E di X_2? Mostrare che per $n \to \infty$ la successione $\{X_n\}_n$ converge in legge. Se $\sigma^2 = 1$ e $\alpha = 1/2$, quanto vale la probabilità che X_n disti dall'origine per meno di 1 quando n è grande?

Esercizio 5 Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d., con media 0 e varianza σ^2. Studiare la convergenza in legge, per $n \to \infty$, di $Z_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2/n$.

Esercizio 6 **a)** Sia $\{\mu_n\}_n$ la successione di misure di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$ definita da

$$\mu_n = (1-\alpha_n)\,\delta_0 + \alpha_n\,\delta_n,$$

dove $\delta_x \equiv \delta_{\{x\}}$ denota la misura di Dirac in $x \in \mathbb{R}$ e $\{\alpha_n\}_n$ è una successione in $[0,1]$. Dimostrare che $\{\mu_n\}_n$ converge debolmente per $n \to \infty$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

b) Usando **a)**, costruire un esempio di successione $\{\mu_n\}_n$ che converge debolmente ma tale che non convergano le successioni delle medie e/o delle varianze alla media e/o alla varianza del limite.

---

[1] Le v.a. $X_1, X_2, \ldots$ si possono interpretare come le posizioni successive di un mobile che ad ogni istante si sposta dalla posizione corrente X_n in αX_n ma subisce anche una perturbazione (aleatoria) Z_n.

Esercizio 7 **a)** Siano $\{\mu_n\}_n$ e $\{\nu_n\}_n$ due successioni di misure di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tali che $\mu_n \overset{w}{\to} \mu$ e $\nu_n \overset{w}{\to} \nu$ per $n \to \infty$, con μ e ν due misure di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dimostrare che $\mu_n * \nu_n \overset{w}{\to} \mu * \nu$.

b) Sia μ una misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ e sia ν_σ una probabilità $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Dimostrare che $\mu * \nu_\sigma \overset{w}{\to} \mu$ per $\sigma \to 0$.

Esercizio 8 Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. i.i.d., con varianza (finita) σ^2. Posto $\bar{X}_n = \sum_{k=1}^n X_k/n$, dimostrare che la successione $S_n^2 = \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2/(n-1)$ converge q.c. e determinarne il limite. Calcolare anche $\mathbb{E}(S_n^2)$.

Esercizio 9 *(Sulla legge dei Grandi Numeri)*
Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. di L^2, a due a due non correlate, e sia, per ogni n, $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n)$. Dimostrare che

a) se $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0$ allora vale la LDGN;

b) se $\sum_n \sigma_n^2 < \infty$ allora vale la LFGN.

Esercizio 10 *(Un po' di controesempi)*

a) Sia $Y \sim \mathrm{Un}(0,1)$ e $\{X_n\}_n$ tale che $X_n = Y$ per ogni n. Studiare la convergenza di $\{X_n\}_n$ a $X = 1 - Y$.

b) Sia $\{X_n\}_n$ tale che $\mathbb{P}(X_n = n^\alpha) = 1/n^2 = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza di $\{X_n\}_n$.

c) Sia $\{X_n\}_n$ tale che $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Studiare la convergenza di $\{X_n\}_n$.

Esercizio 11 Sia X_n una v.a. discreta, uniforme sull'insieme $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Studiare la convergenza in legge di $\{X_n/n\}_n$.

Esercizio 12 Sia N il primo istante (aleatorio!) in cui si osserva l'uscita di testa in una serie di lanci ripetuti di una moneta. Sia $p \in (0,1)$ la probabilità che esca testa. Studiare la convergenza in legge[2] di $2pN$ quando $p \to 0$.

[2] Scrivere esplicitamente la f.c. di N e quindi di $2pN$, studiandone poi il comportamento asintotico per $p \to 0$.

Esercizio 1 Se "successo"="esce il 6", X è il numero di successi su 900 prove, quindi $X \sim \mathrm{Bi}(900, p)$ ed inoltre X si può rappresentare in legge come $\sum_{k=1}^{900} X_k$, con X_k indipendenti e bernoulliane $\mathrm{Be}(p)$. Quindi,

$$\mathbb{P}(X > 180) = \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{k=1}^{900} X_k - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}} > \frac{180 - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}}\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(Z_{900} \leq \frac{180 - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}}\Big)$$

avendo posto $Z_{900} = \frac{\sum_{k=1}^{900} X_k - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}}$. Usando il TLC,

$$\mathbb{P}(X > 180) \simeq 1 - \Phi\Big(\frac{180 - 900\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{900\mathrm{Var}(X_1)}}\Big) \tag{1}$$

dove $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}dt$ denota la f.d. di una legge $\mathrm{N}(0,1)$. Si noti che tale approssimazione è valida per ogni legge $\mathrm{Bi}(n,p)$, con n grande, ed è detta "approssimazione gaussiana" della legge binomiale.

a) In questo caso $p = 1/6$, quindi $\mathbb{E}(X_1) = 1/6$ e $\mathrm{Var}(X_1) = 5/6$. Allora, da (1),

$$\mathbb{P}(X > 180) \simeq 1 - \Phi\Big(\frac{180 - 900/6}{\sqrt{900 \cdot 5/36}}\Big) = 1 - \Phi(2.68) = 1 - 0.9963 = 0.0037.$$

b) Se il dado è truccato, $p = 2/9$. La procedura scelta individua un dado truccato se $X > 180$, quindi la probabilità con la quale un dado truccato è effettivamente individuato è data da (1) con $X \sim \mathrm{Bi}(900, 2/9)$, o equivalentemente $X_k \sim \mathrm{Be}(2/9)$. In tal caso, $\mathbb{E}(X_k) = 2/9$ e $\mathrm{Var}(X_k) = 14/81$, e la probabilità richiesta è

$$p^* \simeq 1 - \Phi\Big(\frac{180 - 900 \cdot 2/9}{\sqrt{900 \cdot 14/81}}\Big) = 1 - \Phi(-1.60) = \Phi(1.60) = 0.9452.$$

Esercizio 2. a) $\{\sum_{k=1}^{n^2} X_k/n\}_n$ è una sottosuccessione di $\{\sum_{k=1}^{m}(X_k - \mathbb{E}(X_k))/\sqrt{m}\}_m$, che per il TLC converge in legge ad una v.a. $\mathrm{N}(0, \mathrm{Var}(X_k)) = \mathrm{N}(0,4)$. Allora, il limite richiesto esiste e

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} X_k > 2\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} X_k \leq 2\Big)\Big) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2)$$

dove $Z \sim \mathrm{N}(0,4)$. Ora, si ha[3] $Z/2 \sim \mathrm{N}(0,1)$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} X_k > 2\Big) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

b) Posto $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2/n$ per la LGN si ha che $Y_n \to \mathbb{E}(X_1^2) = 4$ q.c. per $n \to \infty$. Poiché $Z_n := \sum_{k=1}^{n} X_k^2/n^2 = Y_n/n$, allora $Z_n \to 0$ q.c., quindi in probabilità e in legge. Studiamo la convergenza in media, ovviamente a 0:

$$\mathbb{E}(|Z_n|) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2) = \frac{4}{n} \to 0, \quad \text{se } n \to \infty$$

quindi Z_n converge a 0 anche in media.

[3]Fatto noto, e comunque si veda l'esercizio 3.

Esercizio 3. a) Useremo il TCV: $Z = \phi(X)$, con $\phi(x) = (x-\mu)/\sigma$ e $\psi(z) = \phi^{-1}(z) = \sigma\, z + \mu$. Allora,

$$f_Z(z) = f_X \circ \psi(z)\, |\det J_\psi(z)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2),$$

quindi $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Viceversa, sia $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ e $X = \sigma Z + \mu$. Allora $X = \bar\phi(Z)$, con $\bar\phi(z) = \sigma\, z + \mu$ e $\bar\psi(x) = \bar\phi^{-1}(x) = (x-\mu)/\sigma$. Allora,

$$f_X(x) = f_Z \circ \bar\psi(x)\, |\det J_{\bar\psi}(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)),$$

quindi $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Infine, posto $Z = (X-\mu)/\sigma$, allora $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ e $X = \sigma\, Z + \mu$, quindi, ricordando che $\mathbb{E}(Z) = 0$ e $\mathrm{Var}(Z) = 1$, si ha $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sigma\, Z + \mu) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(\sigma\, Z + \mu) = \sigma^2 \mathrm{Var}(Z) = \sigma^2$.

b) Posto ancora $Z = (X-\mu)/\sigma$, allora $\varphi_Z(\theta) = e^{-\theta^2/2}$ e

$$\varphi_X(\theta) = \varphi_{\sigma Z + \mu}(\theta) = e^{i\theta\mu} \varphi_Z(\sigma\theta) = e^{i\theta\mu - \sigma^2\theta^2/2}.$$

c) Posto $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, ricordando che le X_k sono indipendenti si ha

$$\varphi_{S_n}(\theta) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(\theta) = \prod_{k=1}^n e^{i\theta\mu_k - \sigma^2\theta_k^2/2} = e^{i\theta m_n - \sigma^2\rho_n^2/2}$$

con $m_n = \sum_{k=1}^n \mu_k$ e $\rho_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Allora, $S_n \sim \mathrm{N}(m_n, \rho_n^2)$: la somma di n gaussiane indipendenti è ancora una gaussiana, di media e varianza pari alla somma delle medie e delle varianze rispettivamente. Ma allora,

$$Z_n := \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k)}{\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}\Big(0, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sigma_k^2\Big)$$

Se in particolare $\sigma_k^2 = \sigma^2$ per ogni k, $Z_n \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, da cui segue che il TLC qui non solo vale ma di più: vale per ogni n e non solo asintoticamente. Nel caso generale, possiamo scrivere

$$\varphi_n(\theta) \equiv \varphi_{Z_n}(\theta) = \exp\Big(-\frac{\theta^2}{2n}\sum_{k=1}^n \sigma_k^2\Big)$$

che converge per $n \to \infty$ se e solo se converge $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. In tal caso, se σ^2 denota il limite della media aritmetica delle varianze, si ha che Z_n è una gaussiana per ogni n che converge per $n \to \infty$ ad una v.a. ancora gaussiana, di media 0 e varianza σ^2.

Esercizio 4. a) Studiamo la convergenza delle funzioni caratteristiche: usando l'esercizio 3,

$$\varphi_{X_n}(\theta) = e^{i\theta\mu_n - \sigma_n^2\theta^2/2} \to e^{i\theta\mu - \sigma^2\theta^2/2} =: g(\theta), \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Ora, $g(\theta) = \varphi_X(\theta)$, con $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Usando il teorema di convergenza di Lévy, possiamo concludere che $X_n \to X$ in legge.

b) $X_1 = \alpha\, x + Z_0$, con $Z_0 \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, quindi $X_1 \sim \mathrm{N}(\alpha\, x, \sigma^2)$. Poi, $X_2 = \alpha\, X_1 + Z_1$, dove X_1 e Z_1 sono indipendenti e gaussiane. Ma allora (usando l'esercizio (3)), X_2 è ancora gaussiana, di media $\alpha\mathbb{E}(X_1) = \alpha^2\, x$ e varianza $\alpha^2\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(Z_1) = \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2$. L'idea quindi è che, per $n \geq 1$,

$$X_{n+1} \sim \mathrm{N}(\alpha^{n+1}\, x, \sigma^2(1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{2n})).$$

Infatti,

$$X_{n+1} = \alpha\, X_n + Z_n = \alpha(\alpha\, X_{n-1} + Z_{n-1}) + Z_n = \alpha^2\, X_{n-1} + \alpha\, Z_{n-1} + Z_n = \alpha^2(\alpha\, X_{n-2} + Z_{n-2}) + \alpha\, Z_{n-1} + Z_n$$
$$= \cdots = \alpha^{n+1}\, X_0 + \alpha^n Z_0 + \alpha^{n-1} Z_1 + \cdots + \alpha\, Z_{n-1} + Z_n = \alpha^{n+1}\, x + \sum_{k=0}^n \alpha^k\, Z_{n-k}.$$

Ora, le Z_j sono indipendenti di legge $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$, quindi (esercizio 3) $\sum_{k=0}^n \alpha^k Z_{n-k}$ è una gaussiana di media nulla e varianza $\sigma^2 \sum_{k=0}^n \alpha^{2k}$. Poi, $\alpha^{n+1} x$ è solo una traslazione, quindi (verificare!) $X_{n+1} \sim \mathrm{N}(\mu_{n+1}, \sigma_{n+1}^2)$, dove

$$\mu_{n+1} = \alpha^{n+1} x \qquad\qquad \sigma_{n+1}^2 = \sigma^2 \sum_{k=0}^n \alpha^{2k}.$$

Se $|\alpha| < 1$, $\mu_n \to 0$ e $\sigma_n^2 \to \sigma^2/(1-\alpha^2)$ per $n \to \infty$. Usando **a)**, possiamo dire che X_n converge in legge ad una v.a. gaussiana, di media 0 e varianza $\sigma^2/(1-\alpha^2)$. La probabilità richiesta è $\mathbb{P}(|X_n| < 1)$, e per n grande si puù stimare come segue: detta X una v.a. di legge $\mathrm{N}(0, \sigma^2/(1-\alpha^2))$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n| < 1) \simeq \mathbb{P}(|X| < 1) &= \mathbb{P}\Big(\frac{|X|}{\sqrt{\sigma^2/(1-\alpha^2)}} < \frac{1}{\sqrt{\sigma^2/(1-\alpha^2)}}\Big) \\ &= \Phi\Big(\sqrt{1-\alpha^2}/\sigma\Big) - \Phi\Big(-\sqrt{1-\alpha^2}/\sigma\Big) = 2\Phi\Big(\sqrt{1-\alpha^2}/\sigma\Big) - 1\end{aligned}$$

Se $\alpha = 1/2$ e $\sigma = 1$, si ha

$$\mathbb{P}(|X_n| < 1) \simeq 2\Phi\Big(\sqrt{3}/2\Big) - 1 = 2\Phi(0.866) - 1 = 2 \cdot 0.806 - 1 = 0.612.$$

Esercizio 5. $Z_n = f(Y_n)$, con $f(y) = y^2$ e $Y_n = (X_1 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$. Ora, usando il TLC, $Y_n \to Y$ in legge, con $Y \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2)$. Poiché f è continua, si ottiene $Z_n \to f(Y) = Y^2$ in legge: Z_n converge in legge ad una v.a. che è il quadrato di una $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$ (se ne calcoli la densità!).

Esercizio 6. a) Mostriamo anzitutto che $\{\mu_n\}_n$ è *tight* se e solo se[4] $\alpha_n \to 0$ per $n \to \infty$. Per $K > 0$,

$$\mu_n([-K,K]) = (1-\alpha_n)\delta_0([-K,K]) + \alpha_n\,\delta_n([-K,K]) = (1-\alpha_n) + \alpha_n\,\delta_n([-K,K]).$$

Allora, per ogni $n > K$, $\mu_n([-K,K]) = (1-\alpha_n)$, quindi

$$\inf_{n>K} \mu_n([-K,K]) = \inf_{n>K}(1-\alpha_n) = 1 - \sup_{n>K} \alpha_n.$$

Quindi, se $\alpha_n \to 0$ per $n \to \infty$ esiste n_0 tale che $\alpha_n < \varepsilon$ per ogni $n > n_0$: scelto allora $K = n_0$, si ha che

$$\inf_{n>K} \mu_n([-K,K]) = 1 - \sup_{n>K} \alpha_n > 1 - \varepsilon,$$

cioè $\{\mu_n\}_n$ è *tight*. Viceversa, supponiamo che μ_n sia *tight*: per ogni ε esiste un $K > 0$ tale che

$$1 - \varepsilon \le \inf_n \mu_n([-K,K]) \le \inf_{n>K} \mu_n([-K,K]) = 1 - \sup_{n>K} \alpha_n.$$

Ma allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$ si ha che $0 \le \alpha_n < \varepsilon$, cioè $\alpha_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Ciò prova che se $\{\mu_n\}_n$ converge debolmente allora $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Dimostriamo ora che vale anche il viceversa: supponiamo che $\alpha_n \to 0$ e dimostriamo che $\{\mu_n\}_n$ converge debolmente. Sia F_n la f.d. associata a μ_n:

$$F_n(x) = \mu_n((-\infty,x]) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1-\alpha_n & \text{se } 0 \le x < n \\ 1 & \text{se } x \ge n \end{cases}$$

Quindi, se $\alpha_n \to 0$, $F_n(x) \to F(x)$, dove

$$F = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

[4] L'idea è che, se $\alpha_n \not\to 0$, allora $\mu_n([n,+\infty)) = \mu_n(\{n\}) = \alpha_n$ non va a 0 per $n \to \infty$: la "massa" di μ_n "scappa" all'infinito.

che è la f.d. della v.a. $X = 0$ q.c., quindi $\mu_n \xrightarrow{w} \mu = \delta_0$.

b) Fissiamo una successione α_n che va a 0, quindi il limite debole delle μ_n è $\mu = \delta_0$. Quindi la media e la varianza associate a μ sono entrambe uguali a 0. La media associata alle μ_n è

$$\int_{\mathbb{R}} x\,\mu_n(dx) = 0 \cdot (1-\alpha_n) + n \cdot \alpha_n = n\,\alpha_n.$$

Quindi, la successione delle medie non converge alla media del limite se e solo se $n\alpha_n \not\to 0$, ad esempio $\alpha_n = n^{-\beta}$, con $0 < \beta \leq 1$ (ma anche $\alpha_n = 1/n$ se n è pari e $\alpha_n = 1/(2n)$ se n è dispari). Calcoliamo la varianza di μ_n:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\,\mu_n(dx) - (n\,\alpha_n)^2 = 0 \cdot (1-\alpha_n) + n^2 \cdot \alpha_n - n^2\,\alpha_n^2 = n^2\,\alpha_n(1-\alpha_n).$$

Non c'è convergenza delle varianze se e solo se $n^2\,\alpha_n \not\to 0$, ad esempio $\alpha_n = n^{-\beta}$, con $0 < \beta \leq 2$ (si noti che per $1 < \beta \leq 2$ non convergono le varianze ma convergono le medie).

Esercizio 7. **a)** Indichiamo con φ_{μ_n}, φ_{ν_n} e $\varphi_{\mu_n * \nu_n}$ la funzione caratteristica di μ_n, ν_n e $\mu_n * \nu_n$ rispettivamente. Sappiamo che, per $n \to \infty$, $\varphi_{\mu_n} \to \varphi_\mu$ e $\varphi_{\nu_n} \to \varphi_\nu$, dove ovviamente φ_μ e φ_ν denotano le f.c. delle leggi limite μ e ν. Ora, dette X_n e Y_n delle v.a. con legge μ_n e ν_n rispettivamente, la misura $\mu_n * \nu_n$ è la legge di $X_n + Y_n$ quando si supponga che X_n e Y_n sono indipendenti. Analogamente, la misura $\mu * \nu$ è la legge di $X + Y$, con X e Y indipendenti e di legge, rispettivamente, μ e ν. Ma allora,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \varphi_{\mu_n * \nu_n}(\theta) &= \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n + Y_n}(\theta) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(\theta)\varphi_{Y_n}(\theta) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi_{\mu_n}(\theta)\varphi_{\nu_n}(\theta) = \varphi_\mu(\theta)\varphi_\nu(\theta) = \varphi_X(\theta)\varphi_Y(\theta) = \varphi_{X+Y}(\theta) = \varphi_{\mu*\nu}(\theta) \end{aligned}$$

per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, da cui la tesi.

b) La tesi segue da **a)** una volta mostrato che $\nu_\sigma \xrightarrow{w} \delta_0$ per $\sigma \to 0$, dove δ_0 denota la misura di Dirac in 0. Infatti, in tal caso la legge limite sarebbe $\mu * \delta_0$, ovvero la legge di $X + 0 = X$, dove X è una v.a. con legge μ. Mostriamo quindi che $\nu_\sigma \xrightarrow{w} \delta_0$ per $\sigma \to 0$. Ricordando che $\nu_\sigma \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, la sua f.c. è

$$\varphi_{\nu_\sigma}(\theta) = e^{-\sigma^2\,\theta^2/2} \to 1, \qquad \text{quando } \sigma \to 0.$$

Ora, ovviamente $\varphi_{\delta_0}(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta 0}) = 1$ per ogni θ, quindi $\nu_\sigma \xrightarrow{w} \delta_0$.

Esercizio 8. Posto $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 &= \sum_{k=1}^n (X_k^2 + \bar{X}_n^2 - 2\,X_k\,\bar{X}_n) = \sum_{k=1}^n X_k^2 + n\,\bar{X}_n^2 - 2\bar{X}_n \sum_{k=1}^n X_k \\ &= \sum_{k=1}^n X_k^2 + n\,\bar{X}_n^2 - 2n\,\bar{X}_n^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2 - n\,\bar{X}_n^2, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2 = \frac{n}{n-1}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \bar{X}_n^2\Big).$$

Ora, per la LGN $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n^2 \to \mathbb{E}(X_1^2)$ q.c. e $\bar{X}_n \to \mathbb{E}(X_1)$ q.c., quindi

$$S_n^2 \to 1 \cdot \Big(\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2\Big) = \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2, \qquad \text{q.c.}$$

Infine,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^2) &= \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n X_k^2 - n\,\bar{X}_n^2\Big) = \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) - n\,\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\Big)^2\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{n-1}\Big(n\,\mathbb{E}(X_1^2) - \frac{1}{n}\mathbb{E}\Big(\sum_{k,j=1}^n X_k\,X_j\Big)\Big) = \frac{1}{n-1}\Big(n\,\mathbb{E}(X_1^2) - \frac{1}{n}\sum_{k,j=1}^n \mathbb{E}(X_k\,X_j)\Big) \end{aligned}$$

Ma se $k = j$, $\mathbb{E}(X_k X_j) = \mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(X_1^2)$ e se $k \neq j$ (usando l'indipendenza), $\mathbb{E}(X_k X_j) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}^2(X_1)$, quindi

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \frac{1}{n-1}\Big(n\,\mathbb{E}(X_1^2) - \frac{1}{n}\Big(n\mathbb{E}(X_1^2) + n(n-1)\mathbb{E}^2(X_1)\Big)\Big) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}^2(X_1) = \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2.$$

Allora, S_n^2 converge q.c. a σ^2 e si mantiene in media sempre uguale a σ^2.

Esercizio 9. Poniamo $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}(X_k))$. Usando la disuguaglianza di Chebycev, per ogni $\delta > 0$ si ha (ricordiamo che le X_k sono a due a due non correlate)

$$\mathbb{P}(|Z_n| > \delta) = \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}(X_k))\Big| > n\delta\Big) \le \frac{\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^n X_k)}{n^2\delta^2} = \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k) = \frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

cioè

$$\mathbb{P}(|Z_n| > \delta) \le \frac{\alpha_n}{\delta^2}, \qquad \text{con} \quad \alpha_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \tag{2}$$

a) Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0$. In tal caso, σ_n^2 è limitata: esiste $C > 0$ tale che $\sigma_n^2 \le C$ per ogni n. Quindi, $\alpha_n \le C/n \to 0$ per $n \to \infty$ e da (2) segue che $\mathbb{P}(|Z_n| > \delta) \to 0$ per $n \to \infty$, cioè $Z_n \to 0$ in probabilità, o equivalentemente vale la LDGN.

b) Supponiamo ora che $C := \sum_n \sigma_n^2 < \infty$. Allora $\alpha_n \le C/n^2 \to 0$ per $n \to \infty$ e da (2) segue che $\sum_n \mathbb{P}(|Z_n| > \delta) < \infty$, quindi $Z_n \to 0$ q.c., o equivalentemente vale la LFGN.

Esercizio 10. a) $|X_n - X| = |1 - 2Y|$, quindi $X_n \not\to X$ q.c., in probabilità e in L^p. Studiamo la convergenza in legge. La f.d. di X è

$$F_X(x) = \mathbb{P}(1 - Y \le x) = 1 - F_Y(1 - x).$$

Ora, poiché $Y \sim \mathrm{Un}(0,1)$, $F_Y(y) = y$ per $y \in [0,1)$, $F_Y(y) = 0$ se $y < 0$ e $F_Y(y) = 1$ per $y \ge 1$, quindi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ x & \text{se } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

cioè $X \sim \mathrm{Un}(0,1)$. Allora, $F_{X_n}(x) = F_X(x)$ per ogni X, quindi $X_n \to X$ in legge.

b) Cominciamo a studiare la convergenza in legge. La legge di X_n è $\mu_n = (1 - 1/n^2)\,\delta_0 + 1/n^2\,\delta_{n^\alpha}$: si verifica facilmente che $X_n \to 0$ in legge, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo analogo a quanto visto nell'esercizio 9. Oppure, si noti che

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \text{se } 0 \le x < n^\alpha \\ 1 & \text{se } x > n^\alpha \end{cases}$$

e $F_{X_n}(x) \to F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

è la f.d. della v.a. $X = 0$ q.c. Ma allora $X_n \to 0$ in legge, quindi in probabilità (perché il limite è costante q.c.). Inoltre, $X = 0$ q.c. è il "candidato limite" per ogni altro tipo di convergenza. Studiamo la convergenza in L^p:

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = n^{\alpha p - 2},$$

dunque $X_n \to 0$ in L^p se $\alpha < 2/p$. Per la convergenza q.c., osserviamo che, fissato $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta) = \mathbb{P}(X_n = n^\alpha, n^\alpha > \delta) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n^\alpha > \delta \\ 0 & \text{se } n^\alpha \le \delta \end{cases}$$

In ciascun caso, $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \delta) \le \sum_n 1/n^2 < \infty$, quindi $X_n \to 0$ q.c. per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ricapitolando, $X_n \to 0$ q.c., in probabilità e in legge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; fissato p, $X_n \to 0$ in L^p se $\alpha < 2/p$ e se invece $\alpha \ge 2/p$, X_n non converge in L^p.

c) $X_n \to 0$ in legge: si prova con argomenti analoghi a quelli usati in **b)**. Quindi, $X_n \to 0$ anche in probabilità.

Per la convergenza in L^p, il limite non può che essere 0 e

$$\mathbb{E}(|X_n|^p) = \frac{1}{n} \to 0, \qquad \text{per } n \to \infty$$

quindi $X_n \to 0$ in L^p per ogni p.

Studiamo infine la convergenza q.c. Sia $\delta > 0$: se $\delta > 1$ allora $\mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) = 0$. Se invece $\delta \le 1$ allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) &= \mathbb{P}(X_n = 1 \text{ i.o.}) = \mathbb{P}(\cap_n \cup_{k\ge n} \{X_n = 1\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k\ge n}\{X_n = 1\}) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k=n}^m \{X_n = 1\}).\end{aligned}$$

Ora $\cup_{k=n}^m \{X_n = 1\} \supset \{X_m = 1\}$, quindi $\mathbb{P}(\cup_{k=n}^m \{X_n = 1\}) \ge \mathbb{P}(X_m = 1) = 1 - 1/m$. Allora, per $0 < \delta \le 1$,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) \ge \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{m}\Big) = 1,$$

dunque $\mathbb{P}(|X_n| > \delta \text{ i.o.}) = 1$ e ciò prova che $X_n \not\to 0$ q.c.

Esercizio 11. Poniamo $Y_n = X_n/n$. Per ogni n fissato, Y_n è a valori in $\{1/n, 2/n, \dots, 1\}$, quindi $F_{Y_n}(y) = 0$ se $y < 0$ e $F_{Y_n}(y) = 1$ se $y \ge 1$. Se invece $y \in [0, 1)$,

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(X_n \le ny) = \sum_{k\,:\,k\le ny} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{[ny]}{n}$$

dove $[ny]$ denota la parte intera di ny. Poiché $[ny]/n \to y$ per $n \to \infty$, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = F(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ y & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

F è la f.d. di una v.a. $\mathrm{Un}(0,1)$, dunque $Y_n \to Y$ in legge, con $Y \sim \mathrm{Un}(0,1)$.

Esercizio 12. Cerchiamo dapprima la legge di N. Ovviamente N può assumere i valori $1, 2, \dots$, corrispondenti al lancio in cui per la prima volta si ottiene testa. Indichiamo con X_n il risultato dell'n-esimo lancio: $X_n = 1$ se esce testa e $X_n = 0$ se esce croce. Assumendo (ragionevolmente) le X_n indipendenti, si ha $\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ e per $k \ge 2$,

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) = (1-p)^{k-1}\, p$$

(ovvero, N è una v.a. geometrica di parametro p). Studiamo la f.c. di $2pN$:

$$\varphi_{2pN}(\theta) = \varphi_N(2p\theta),$$

dove

$$\begin{aligned}\varphi_N(t) = \mathbb{E}(e^{itN}) &= \sum_{k=1}^\infty e^{itk}(1-p)^{k-1} p = e^{it} p \sum_{k=1}^\infty \Big((1-p)e^{it}\Big)^{k-1} \\ &= e^{it} p \sum_{k=0}^\infty \Big((1-p)e^{it}\Big)^k = e^{it} p\, \frac{1}{1-(1-p)e^{it}}\end{aligned}$$

Allora,

$$\varphi_{2pN}(\theta) = \frac{p\, e^{2ip\theta}}{1-(1-p)e^{2ip\theta}}.$$

Ora, per $p \to 0$, $e^{2ip\theta} = 1 + 2ip\theta + o(p)$, quindi, sempre per $p \to 0$,

$$\begin{aligned}\varphi_{2pN}(\theta) &= \frac{p(1+2ip\theta+o(p))}{1-(1-p)(1+2ip\theta+o(p))} = \frac{p(1+2ip\theta+o(p))}{-2ip\theta-o(p)+p+2ip^2\theta+p\,o(p)} \\ &= \frac{1+2ip\theta+o(p)}{-2i\theta-o(p)/p+1+2ip\theta+o(p)} \xrightarrow{p\to 0} \frac{1}{1-2i\theta} =: g(\theta).\end{aligned}$$

Poiché il limite esiste per ogni θ e la funzione limite g è continua in $\theta = 0$, il teorema di convergenza garantisce che $2pN$ converge in legge, per $p \to 0$, ad una v.a. che ha g come f.c. Infine, osservando che $g(\theta) = \frac{1}{1-2i\theta} = \frac{1/2}{1/2-i\theta}$ è la f.c. della legge esponenziale di parametro $1/2$, si può concludere che $2pN$ converge in legge ad una v.a. che si distribuisce come una $\mathrm{Exp}(1/2)$.

Oppure, si può anche procedere come segue. Indicando con F_p la f.d. di $2pN$, si ha $F_p(x) = \mathbb{P}(2pN \leq x) = \mathbb{P}(N \leq x/2p)$. Quindi, $F_p(x) = 0$ se $x < 2p$ e per $x \geq 2p$,

$$F_p(x) = \sum_{k\,:\,1\leq k\leq x/2p} (1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{[x/2p]-1}(1-p)^k = p\,\frac{1-(1-p)^{[x/2p]}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{[x/2p]}$$

Allora,

$$\lim_{p\to 0} F_p(x) = \lim_{p\to 0}\begin{cases} 0 & \text{se } x < 2p \\ 1-(1-p)^{[x/2p]} & \text{se } x > 2p \end{cases} = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1-e^{-x/2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

che è la f.d. di una $\mathrm{Exp}(1/2)$, dunque $2pN \to X$ in legge, con $X \sim \mathrm{Exp}(1/2)$.