Esercizi di CP2, I
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 **a)** Sia $\{\Sigma_\alpha\}_\alpha$ una famiglia di $\sigma-$algebre su S. Dimostrare che $\Sigma = \cap_\alpha \Sigma_\alpha$ è una $\sigma-$algebra su S.

b) Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ collezioni di sottoinsiemi di S e siano $\sigma(\mathcal{C})$, $\sigma(\mathcal{C}_1)$, $\sigma(\mathcal{C}_2)$ le rispettive $\sigma-$algebre generate[1]. Dimostrare che

b1) $\sigma(\mathcal{C}) = \cap_{\Sigma\in\Sigma_\mathcal{C}} \Sigma$, dove $\Sigma_\mathcal{C}$ è l'insieme delle $\sigma-$algebre contenenti $\mathcal{C}$;

b2) se in particolare $\mathcal{C}$ è una $\sigma-$algebra allora $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;

b3) se $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ allora $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.

c) Siano $\mathcal{C}_1 = \{A\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{A, B\}$, con $A, B \subset S$. Scrivere $\sigma(\mathcal{C}_1)$ e $\sigma(\mathcal{C}_2)$.

d) Provare con un esempio che l'unione di due $\sigma-$algebre **non è** in generale una $\sigma-$algebra.

Esercizio 2 **a)** Fissato S, sia Σ_0 la seguente classe di sottoinsiemi di S: $A \in \Sigma_0$ se e solo se A è finito oppure A^c è finito. Mostrare che:

a1) Σ_0 è un'algebra;

a2) se S è finito allora Σ_0 è una $\sigma-$algebra;

a3) se S non è finito allora Σ_0 non è una $\sigma-$algebra.

b) Sia S un insieme non finito e Σ la seguente classe di sottoinsiemi di S: $A \in \Sigma$ se e solo se A è finito o numerabile oppure A^c è finito o numerabile.

b1) Mostrare che Σ è una $\sigma-$algebra.

b2) Si prenda $S = (0, 1]$. Mostrare che Σ è strettamente contenuta in $\mathcal{B}(0, 1]$ e verificare (con un esempio) che l'unione più che numerabile di insiemi di una $\sigma-$algebra non è in generale un elemento della $\sigma-$algebra.

Esercizio 3 Sia (S, Σ, μ) uno spazio di misura. Si ricorda che presi $A, B \in \Sigma$ allora $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ e se μ è una misura finita allora $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

a) Dimostrare che dati $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ allora $\mu(\cup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$.

b) Si supponga μ misura finita. Dimostrare che vale la *formula di inclusione-esclusione*: presi $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ allora

$$\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k\,:\,k\leq n} \mu(A_k) - \sum_{i,j\,:\,i<j\leq n} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k\,:\,i<j<k\leq n} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mu(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Esercizio 4 *(Misure discrete)*

a) Sia S un insieme finito o numerabile e $\gamma : S \to [0, +\infty)$. Mostrare che esiste una $\sigma-$algebra Σ e una misura μ su (S, Σ) tale che

$$\mu(\{s\}) = \gamma(s), \qquad \text{per ogni } s \in S.$$

b) Dire quali ipotesi richiedere sulla funzione γ affinché

b1) μ sia una misura finita;

b2) μ sia una misura $\sigma-$finita;

b3) (S, Σ, μ) sia uno spazio di probabilità.

[1] Si ricorda che $\sigma(\mathcal{C})$ è, per definizione, la più piccola $\sigma-$algebra contenente $\mathcal{C}$, cioè: se Σ è una $\sigma-$algebra e $\Sigma \supset \mathcal{C}$ allora $\Sigma \supset \sigma(\mathcal{C})$.

Esercizio 1. **a)** Si ha: $S \in \Sigma_\alpha$ per ogni α, quindi $S \in \Sigma$; se $A \in \Sigma$ allora $A \in \Sigma_\alpha$ per ogni α, quindi $A^c \in \Sigma_\alpha$ per ogni α e $A^c \in \Sigma$; se $\{A_n\}_n \subset \Sigma$ allora $\{A_n\}_n \subset \Sigma_\alpha$ per ogni α, quindi $\cup_n A_n \in \Sigma_\alpha$ per ogni α e $\cup_n A_n \in \Sigma$.

b1) Intanto, da **a)**, $\hat{\Sigma} := \cap_{\Sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}}} \Sigma$ è una $\sigma-$algebra. $\hat{\Sigma}$ contiene $\mathcal{C}$: se $C \in \mathcal{C}$ allora $C \in \Sigma$ per ogni $\Sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}}$, quindi $C \in \hat{\Sigma}$. Infine $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$ per ogni $\Sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}}$, quindi $\hat{\Sigma} = \sigma(\mathcal{C})$.

b2) Basta osservare che in questo caso $\mathcal{C} \in \Sigma_{\mathcal{C}}$ e usare **b1)**.

b3) Basta osservare che $\Sigma_{\mathcal{C}_1} \subset \Sigma_{\mathcal{C}_2}$ e usare **b1)**.

c) Si ha $\sigma(\mathcal{C}_1) = \{\emptyset, S, A, A^c\}$ e $\sigma(\mathcal{C}_2) = \{\emptyset, S, A, A^c, B, B^c, A \cup B, A \cup B^c, A^c \cup B, A^c \cup B^c, A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c\}$.

d) Prendiamo $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, S, A, A^c\}$ e $\sigma(\{B\}) = \{\emptyset, S, B, B^c\}$, con $A, B \subset S$: se A, B possono essere scelti tali che $A \cup B \neq \emptyset, A, B, S$, allora $\sigma(\{A\}) \cup \sigma(\{B\}) = \{\emptyset, S, A, A^c, B, B^c\}$ contiene, ad esempio, sia A che B ma non $A \cup B$, quindi non è una $\sigma-$algebra, né un'algebra.

Esercizio 2. **a1)** $S \in \Sigma_0$: se S è finito, niente da dire; se invece S non è finito, $S^c = \emptyset$ è finito. Σ_0 è chiusa sotto operazione di complementare: banale. Infine, siano $A, B \in \Sigma_0$. Occorre suddividere in casi:

- se A e B sono entrambi finiti allora $A \cup B$ è finito, dunque $A \cup B \in \Sigma_0$;
- se A^c e B^c sono entrambi finiti allora $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ è finito, dunque $A \cup B \in \Sigma_0$;
- se A e B^c sono entrambi finiti allora $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset B^c$ è finito, dunque $A \cup B \in \Sigma_0$;
- se A^c e B sono entrambi finiti allora $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset A^c$ è finito, dunque $A \cup B \in \Sigma_0$;

a2) Se S è finito, $\#\mathcal{P}(S) < \infty$ ($\mathcal{P}(S) =$ insieme delle parti di S) quindi presa una qualsiasi successione $\{A_n\}_n$ di sottoinsiemi di S allora esiste un indice n_0 tale che per ogni $n > n_0$, A_n coincide con $\emptyset$ oppure S oppure con un qualche A_k, con $k \leq n_0$. Ciò significa che se $\{A_n\}_n \subset \Sigma_0$ allora $\cup_n A_n = \cup_{k=1}^N B_k$ con $B_k \in \Sigma_0$ opportuni e da **a1)** segue che $\cup_n A_n \in \Sigma_0$.

a3) Se S non è finito, sia $\{s_k\}_k$ un insieme numerabile di S. Posto $A = \{s_1, s_3, \ldots, s_{2k+1}, \ldots\}$ allora $A^c \supset \{s_2, s_2, \ldots, s_{2k}, \ldots\}$, quindi $A \notin \Sigma_0$. Ma $A = \cup_{k \geq 0}\{s_{2k+1}\}$ e $\{s_{2k+1}\} \in \Sigma_0$ per ogni $k \geq 0$, quindi Σ_0 non è una $\sigma-$algebra.

b1) Dimostriamo solo che Σ è chiusa sotto unioni numerabili (per le altre proprietà, si proceda in modo analogo a quanto visto sopra). Sia $\{A_n\}_n \subset \Sigma$. Se A_n finito o numerabile per ogni n allora $\cup_n A_n$ è finito o numerabile, quindi $\cup_n A_n \in \Sigma$. Altrimenti, cioè se esiste un ℓ tale che A_ℓ non è finito né numerabile, allora A_ℓ^c lo è e $(\cup_n A_n)^c = \cap_n A_n^c \subset A_\ell^c$ è finito o numerabile, e ancora $\cup_n A_n \in \Sigma$.

b2) Sia $A \in \Sigma$. Allora o A o A^c sono numerabili, cioè $A = \{a_k\}_k = \cup_k \{a_k\}$ oppure $A^c = \{a_k\}_k = \cup_k\{a_k\}$, con $a_k \in (0,1]$ per ogni k. Ora, $\{a_k\} \in \mathcal{B}(0,1]$:

$$\{a_k\} = \cap_n \Big(a_k - \frac{1}{n}, a_k + \frac{1}{n}\Big)$$

da cui segue che o A oppure A^c appartiene a $\mathcal{B}(0,1]$, quindi $A \in \mathcal{B}(0,1]$.

L'inclusione è stretta: basta considerare l'intervallo $(0,1/2]$, che è in $\mathcal{B}(0,1]$ ma non in Σ. Si noti che $(0,1/2] = \cup_{x\,:\,x \in (0,1/2]}\{x\} \notin \Sigma$ pur essendo $\{x\} \in \Sigma$ per ogni $x \in (0,1]$: l'unione più che numerabile di elementi di una $\sigma-$algebra non appartiene in generale alla $\sigma-$algebra.

Esercizio 3. **a)** Per $n = 2$ è vero. Supponiamo sia vero fino a n e verifichiamone la validità per $n+1$:

$$\mu(\cup_{k=1}^{n+1} A_k) = \mu(\,(\cup_{k=1}^{n} A_k) \cup A_{n+1}) \leq \mu(\cup_{k=1}^{n} A_k) + \mu(A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \mu(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k).$$

b) Per $n=2$ è vero. Supponiamo sia vero fino a n e verifichiamone la validità per $n+1$:

$$\mu(\cup_{k=1}^{n+1}A_k) = \mu(\,(\cup_{k=1}^{n}A_k)\cup A_{n+1}) = \mu(\cup_{k=1}^{n}A_k) + \mu(A_{n+1}) - \mu(\,(\cup_{k=1}^{n}A_k)\cap A_{n+1})$$
$$= \mu(\cup_{k=1}^{n}A_k) + \mu(A_{n+1}) - \mu(\cup_{k=1}^{n}(A_k\cap A_{n+1})\,)$$
$$\sum_{k\,:\,k\le n}\mu(A_k) - \sum_{i,j\,:\,i<j\le n}\mu(A_i\cap A_j) + \sum_{i,j,k\,:\,i<j<k\le n}\mu(A_i\cap A_j\cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\mu(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$$
$$+\mu(A_{n+1}) - \Big(\sum_{k\,:\,k\le n}\mu(A_k\cap A_{n+1}) - \sum_{i,j\,:\,i<j\le n}\mu(A_i\cap A_j\cap A_{n+1})$$
$$+\sum_{i,j,k\,:\,i<j<k\le n}\mu(A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_{n+1}) - \cdots + (-1)^{n-1}\mu(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1})\Big)$$
$$= \Big(\sum_{k\,:\,k\le n}\mu(A_k) + \mu(A_{n+1})\Big) - \Big(\sum_{i,j\,:\,i<j\le n}\mu(A_i\cap A_j) + \sum_{k\,:\,k\le n}\mu(A_k\cap A_{n+1})\Big)$$
$$+\Big(\sum_{i,j,k\,:\,i<j<k\le n}\mu(A_i\cap A_j\cap A_k) + \sum_{i,j\,:\,i<j\le n}\mu(A_i\cap A_j\cap A_{n+1})\Big) - \cdots - (-1)^{n-1}\mu(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1})$$
$$= \sum_{k\,:\,k\le n+1}\mu(A_k) - \sum_{i,j\,:\,i<j\le n+1}\mu(A_i\cap A_j) + \sum_{i,j,k\,:\,i<j<k\le n+1}\mu(A_i\cap A_j\cap A_k) - \cdots + (-1)^n\mu(A_1\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1})$$

Esercizio 4. **a)** Poiché dev'essere $\mu(\{s\}) = \gamma(s)$ per ogni $s\in S$, allora $\{s\}\in\Sigma$ per ogni $s\in S$ quindi necessariamente Σ deve contenere $\sigma(\{\,\{s\}\,;\,s\in S\})$. Poiché S è discreto, è immediato verificare che $\sigma(\{\,\{s\}\,;\,s\in S\}) = \mathcal{P}(S)$ (= insieme delle parti), quindi $\Sigma = \mathcal{P}(S)$. Ora, preso $A\in\Sigma$ si ha $A = \cup_{s\,:\,s\in A}\{s\}$ e tale unione (disgiunta) è al più numerabile, quindi $\nu(A) = \sum_{s\,:\,s\in A}\nu(\{s\})$ per ogni misura ν su (S,Σ). Allora, definiamo

$$\mu(A) = \sum_{s\,:\,s\in A}\gamma(s)$$

con la condizione $\mu(A)=0$ se $A=\emptyset$. Verifichiamo che μ è $\sigma-$additiva: siano $A_1, A_2, \ldots$ insiemi disgiunti di Σ. Allora, usando il fatto che gli A_n sono disgiunti e che γ è una funzione non negativa, si ha

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_{s\,:\,s\in\cup_n A_n}\gamma(s) = \sum_n\sum_{s\,:\,s\in A_n}\gamma(s) = \sum_n\mu(A_n)$$

il che prova che μ è una misura su (S,Σ).

b1) Dev'essere $\mu(S)<\infty$, quindi occorre che la serie $\sum_{s\in S}\gamma(s)$ converga. Se S è finito, μ è ovviamente una misura finita.

b2) μ è sempre $\sigma-$finita. Infatti, supponendo $S=\{s_1,s_2,\ldots\}$, si prenda, ad esempio $S_N = \{s_1,s_2,\ldots,s_N\}$. Allora $\cup_N S_N = S$ e $\mu(S_N) = \sum_{k=1}^N\gamma(s_k) < \infty$ perché somma di un numero finito di quantità finite.

b2) μ dev'essere finita e di massa 1: occorre che $\sum_{s\in S}\gamma(s) = 1$