Prova scritta di CP2
12 aprile 2002

Esercizio 1 Sia F una funzione di distribuzione su $\mathbb{R}$. Un punto $m \in \mathbb{R}$ è detto *una mediana* per F se e solo se

$$\lim_{x \uparrow m} F(x) \leq \frac{1}{2} \leq F(m).$$

Dimostrare l'esistenza di almeno una mediana e che l'insieme delle mediane è un insieme chiuso di $\mathbb{R}$. Interpretare il concetto di "mediana".

Esercizio 2 Se $\phi(t)$ denota una funzione caratteristica, dimostrare che anche $\bar{\phi}(t)$, $\phi^2(t)$, $|\phi|^2(t)$ sono funzioni caratteristiche.

Esercizio 3 Sia (X, Y) una coppia di v.a. con densità gaussiana bivariata:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\Big),$$

dove $\rho \in (-1,1)$ è fissato.

a) Calcolare, se esiste, la densità congiunta di X e $Z = (Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$ e dedurre che $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho$.

b) Calcolare $\mathrm{Cov}(X, Z)$ e $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Studiare l'indipendenza tra X e Z e tra X e Y.

c) Sia Λ_X, Λ_Z e Λ_{X+Z} la legge di X, di Z e di $X + Z$ rispettivamente.

c1) Dire se $\Lambda_X \ll \Lambda_Z$ e in caso affermativo calcolare $\frac{d\Lambda_X}{d\Lambda_Z}$.

c2) Dire se $\Lambda_X \ll \Lambda_{X+Z}$ e in caso affermativo calcolare $\frac{d\Lambda_X}{d\Lambda_{X+Z}}$.

Esercizio 4 Si consideri una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ in m sotto-intervalli disgiunti di ampiezza positiva $p_1, p_2, \ldots, p_m$. L'*entropia* di questa partizione è data dalla quantità

$$h = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i.$$

Sia $\{X_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d., con legge $\mathrm{Un}(0, 1)$, e sia $Z_n(i)$ il numero delle v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ che cadono nell'i-esimo intervallo della partizione. Posto

$$R_n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{Z_n(i)},$$

dimostrare che $n^{-1} \log R_n \to -h$ q.c. per $n \to \infty$.

Esercizio 5 **a)** Dimostrare un teorema di rappresentazione di Skorohod e mostrarne qualche interessante esempio di applicazione.

b) Convergenza q.c. e in probabilità: dimostrare eventuali implicazioni e discutere (con controesempi) eventuali non-implicazioni.

Soluzioni

Esercizio 1 Sia
$$I = \left\{x \,:\, F(x) < \frac{1}{2}\right\}.$$
Poiché F è monotona non decrescente e $F(x) \in [0,1]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, I è un intervallo di estremi $-\infty$ e
$$m := \sup\left\{x \,:\, F(x) < \frac{1}{2}\right\} \in \mathbb{R}.$$
Mostriamo che m è una mediana. Intanto, si ha: $F(m) \geq 1/2$. Infatti, se per assurdo si avesse $F(m) < 1/2$ allora poiché F è continua a destra si avrebbe $F(m+\delta) < 1/2$ per qualche $\delta > 0$ piccolo, quindi m non sarebbe il sup. Poi, se $x < m$ allora $x \in I$, cioè $F(x) < 1/2$. Quindi
$$\lim_{x \uparrow m} F(x) \leq \frac{1}{2} \leq F(m),$$
dunque m è una mediana.

Sia ora
$$J = \left\{x \,:\, F(x) \leq \frac{1}{2}\right\}.$$
J è ancora un intervallo, di estremi $-\infty$ e
$$M := \sup\left\{x \,:\, F(x) \leq \frac{1}{2}\right\} \in \mathbb{R}.$$
Poiché $I \subset J$, dev'essere $m \leq M$. Con ragionamenti analoghi, si mostra che anche M è una mediana, anzi che ogni punto dell'intervallo $[m, M]$ è una mediana. Ora, per concludere basta far vedere che preso $y \notin [m, M]$ allora y non è una mediana. Infatti, se $y < m$ allora $y \in I$, quindi $F(y) < 1/2$ da cui segue che y non è una mediana. Se invece $y > M$ allora ogni successione $x_n \uparrow y$ è tale che $x_n \notin J$ per ogni n grande, quindi $\lim_{x \uparrow y} F(x) \geq 1/2$, da cui segue ancora che y non è una mediana.

Una mediana è quindi un punto che separa $\mathbb{R}$ in due insiemi (intervalli) tali che, sotto la misura di probabilità definita dalla f.d. F, hanno l'uno probabilità $\leq 1/2$ e l'altro probabilità $\geq 1/2$. Si noti che m è la mediana *più piccola* mentre M è la mediana *più grande*.

Infine, osserviamo che in alternativa avremmo potuto lavorare con
$$I = \left\{x \,:\, F(x) \geq \frac{1}{2}\right\} \quad \text{e} \quad m := \inf\left\{x \,:\, F(x) \geq \frac{1}{2}\right\},$$
$$J = \left\{x \,:\, F(x) > \frac{1}{2}\right\} \quad \text{e} \quad M := \inf\left\{x \,:\, F(x) > \frac{1}{2}\right\}.$$

Esercizio 2 Sia X una v.a. con f.c. ϕ: $\phi = \phi_X$. Allora
$$\bar{\phi}(t) = \overline{\mathbb{E}(e^{itX})} = \mathbb{E}(\overline{e^{itX}}) = \mathbb{E}(e^{-itX}) = \phi_{-X}(t)$$
quindi $\bar{\phi}$ è una f.c. Poi, scelte Y, Z due v.a. indipendenti con la stessa legge di X, si ha
$$\phi^2(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_X(t) = \phi_Y(t) \cdot \phi_Z(t) = \phi_{Y+Z}(t),$$
e ancora $\phi^2(t)$ è una f.c. Infine, se Y, Z denotano ora due v.a. indipendenti tali che Y ha la stessa legge di X e Z si distribuisce come $-X$, si ha
$$|\phi|^2(t) = \phi(t) \cdot \bar{\phi}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_{-X}(t) = \phi_Y(t) \cdot \phi_Z(t) = \phi_{Y+Z}(t),$$
dunque $|\phi|^2(t)$ è una f.c.

Esercizio 3 a) Si ha: $(X,Z)=\phi(X,Y)$, con $\phi(x,y)=(x,(y-\rho x)/\sqrt{1-\rho^2})$. ϕ è sufficientemente regolare per applicare il TCV: $\phi^{-1}(u,z)=(u,\sqrt{1-\rho^2}\,z+\rho u)$, quindi

$$J_{\phi^{-1}}(u,z)=\sqrt{1-\rho^2}.$$

Allora,

$$f_{X,Z}(u,z)=f_{X,Y}\circ\phi^{-1}(u,z)\,|\det J_{\phi^{-1}}(u,z)|=\frac{1}{2\pi}\,e^{-(u^2+z^2)/2},$$

cioè X e Z sono indipendenti e gaussiane standard. Ora, poiché $Y=\sqrt{1-\rho^2}\,Z+\rho X$, si ha

$$\mathbb{P}(X>0,Y>0)=\mathbb{P}(X>0,\sqrt{1-\rho^2}\,Z+\rho X>0)=\int_0^{+\infty}dx\int_{-\rho x/\sqrt{1-\rho^2}}^{+\infty}dz\,f_{X,Z}(x,z).$$

Nel piano (x,z), sia α l'angolo che la retta $z=-\rho x/\sqrt{1-\rho^2}$ forma con l'asse x. Passando a coordinate polari nell'ultimo integrale ($x=t\cos\theta$, $z=t\sin\theta$), si ha

$$\mathbb{P}(X>0,Y>0)=\int_0^{+\infty}dt\int_\alpha^{\pi/2}d\theta\,\frac{1}{2\pi}\,t\,e^{-t^2/2}=\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big).$$

Ma $\tan\alpha=-\rho/\sqrt{1-\rho^2}$, quindi ($\rho\in(-1,1)$) $\alpha=\arcsin(-\rho)=-\arcsin\rho$, da cui segue che

$$\mathbb{P}(X>0,Y>0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arcsin\rho.$$

b) X e Z sono gaussiane standard indipendenti, quind $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$. Inoltre,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,\sqrt{1-\rho^2}\,Z+\rho X)=\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{Cov}(X,Z)+\rho\mathrm{Cov}(X,X)=\rho,$$

il che prova che se $\rho\neq 0$ allora X e Y non sono indipendenti (ma tale uguaglianza dà anche il significato probabilistico di ρ). Se invece $\rho=0$ allora $Z=Y$, quindi X e Z in tal caso sono indipendenti.

c1) Poiché esistono le densità di X e Z (sono gaussiane standard!), esistono

$$\frac{d\Lambda_X}{d\mathrm{Leb}}(x)=f_X(x)\qquad\text{e}\qquad\frac{d\Lambda_Z}{d\mathrm{Leb}}(x)=f_Z(x).$$

Poiché tali densità sono >0 sempre, allora esiste anche

$$\frac{d\Lambda_X}{d\Lambda_Z}(x)=\frac{f_X(x)}{f_Z(x)}=1,$$

e infatti $\Lambda_X\equiv\Lambda_Z$[1].

c2) Sappiamo che $X+Z$ è ancora gaussiana, di media 0 e varianza 2. Quindi esistono le densità di X e $X+Z$:

$$\frac{d\Lambda_X}{d\mathrm{Leb}}(x)=f_X(x)\qquad\text{e}\qquad\frac{d\Lambda_{X+Z}}{d\mathrm{Leb}}(x)=f_{X+Z}(x).$$

Poiché tali densità sono >0 sempre, allora esiste anche[2]

$$\frac{d\Lambda_X}{d\Lambda_{X+Z}}(x)=\frac{f_X(x)}{f_{X+Z}(x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-x^2/4}.$$

[1] Oppure, sia Λ_X che Λ_Z sono due leggi gaussiane standard, quindi per ogni $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\Lambda_X(A)=\Lambda_Z(A)=\int_A d\Lambda_Z,$$

da cui segue che $\frac{d\Lambda_X}{d\Lambda_Z}(x)=1$.

[2] Oppure: per ogni $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\Lambda_X(A)=\int_A f_X(x)\,dx=\int_A\frac{f_X(x)}{f_{X+Z}(x)}\,f_{X+Z}(x)\,dx=\int_A\frac{f_X(x)}{f_{X+Z}(x)}\,d\Lambda_{X+Z}(x),$$

da cui segue che $\frac{d\Lambda_X}{d\Lambda_{X+Z}}(x)=f_X(x)/f_{X+Z}(x)$.

Esercizio 4 Indichiamo con $I_1, \dots, I_m$ gli m intervalli della partizione. Per ipotesi, $\mathrm{Leb}(I_i) = p_i$, $i = 1, \dots, m$. Ancora per ipotesi,

$$Z_n(i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k \in I_i} = \sum_{k=1}^{n} Y_k^i$$

dove si è posto $Y_k^i = \mathbb{1}_{X_k \in I_i}$. Per ogni fissato i, le Y_k^i sono v.a. i.i.d. con legge bernoulliana di parametro $\mathbb{E}(Y_k^i) = \mathbb{P}(X_k \in I_i) = \mathrm{Leb}(I_i) = p_i$. Ora,

$$\frac{1}{n} \log R_n = \sum_{i=1}^{m} \log p_i \frac{1}{n} Z_n(i) = \sum_{i=1}^{m} \log p_i \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k^i.$$

Per la LFGN,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k^i \to \mathbb{E}(Y_1^i) = p_i, \qquad \text{q.c.}$$

e quindi (la successione-somma di un numero finito di successioni che convergono q.c. converge q.c. alla somma dei limiti)

$$\frac{1}{n} \log R_n \to \sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i \qquad \text{q.c.}$$

Esercizio 5 Si rimanda al libro di testo.