Prova scritta di CP2
9 febbraio 2002

Esercizio 1 Sia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona non decrescente, limitata e càdlàg, e sia

$$\mu_G((a,b]) := G(b) - G(a), \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \le b.$$

a) Mostrare che esiste un'unica misura μ su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tale che $\mu \equiv \mu_G$ sugli intervalli della forma $(a,b]$.

b) Trovare condizioni su G affinché $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ sia uno spazio di probabilità. Se μ è una misura di probabilità, è vero che esiste una v.a. X con legge μ? E in caso affermativo, che relazione c'è tra G e la funzione di distribuzione F_X di X?

c) Supponiamo $G(x) = 1 + \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$, con $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathrm{Leb})$ fissata e $g(t) \ge 0$ per q.o. t. Verificare che G soddisfa le ipotesi richieste e che in tal caso

$$\mu(A) = \int_A g(t)\,dt, \qquad \text{per ogni } A \in \mathcal{B}.$$

Dedurre quindi che $\mu \ll \mathrm{Leb}$ e scrivere $\frac{d\mu}{d\mathrm{Leb}}$. Se μ è una misura di probabilità ed è la legge di una v.a. X, è vero che X ha densità? Se sì, quanto vale la densità f_X di X?

Esercizio 2 Siano $\{X_n\}_n$, $\{Y_n\}_n$ due successioni di v.a. e X, Y due ulteriori v.a. Dimostrare che

$$\text{se } \ X_n \xrightarrow{\mathcal{A}} X \ \text{ e } \ Y_n \xrightarrow{\mathcal{A}} Y \ \text{ allora } \ X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{A}} X + Y$$

dove "$\xrightarrow{\mathcal{A}}$" denota la convergenza q.c. oppure in probabilità[1] oppure in L^p. Mostrare che lo stesso risultato in generale non vale se "$\xrightarrow{\mathcal{A}}$" = convergenza in legge.

Esercizio 3 Per $n \ge 1$, sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tali che $X_n \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_n^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma_n^2 \to 0$ per $n \to \infty$.

a) Studiare la convergenza in probabilità, in L^p e in legge della successione $\{X_n\}_n$.

b) Trovare due successioni possibili per $\{\sigma_n^2\}_n$ tali che $\{X_n\}_n$ converge q.c. e $\{X_n\}_n$ non converge q.c. (eventualmente imponendo una condizione di indipendenza sulle X_n)[2].

Esercizio 4 Siano X e Y due v.a. indipendenti, con legge $\mathrm{Exp}(1)$.

a) Calcolare la densità congiunta e le densità marginali di $U = X + Y$ e $V = X - Y$.

b) Calcolare $\mathrm{Cov}(U, V)$. U e V sono indipendenti?

c) Sia $\{(U_n, V_n)\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. tale che (U_n, V_n) ha la stessa legge di (U, V). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{n} (U_k + V_k - 2) > \sqrt{n}\Big).$$

Esercizio 5 **a)** Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass.

b) La funzione caratteristica: descrivere le proprietà che ritenete particolarmente importanti (giustificando la scelta - eventuali dimostrazioni sono ben accette).

---

[1] Potrebbe essere utile il seguente fatto: se U e V denotano due v.a. allora per ogni $\delta > 0$, $\{|U+V| > \delta\} \subset \{|U| + |V| > \delta\} \subset \{|U| > \delta/2\} \cup \{|V| > \delta/2\}$.

[2] A tale scopo, potrebbe essere utile la seguente stima (facilmente dimostrabile): se $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, allora per $z \to +\infty$

$$\mathbb{P}(|Z| > z) \simeq 2\,\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}\, z}$$

(o, equivalentemente, $\lim_{z\to+\infty} \frac{\mathbb{P}(|Z|>z)}{2\,e^{-z^2/2}/(\sqrt{2\pi}\,z)} = 1$)

Esercizio 1 a) Si tratta della stessa costruzione che consente di passare dalla f.d. alla legge. I passi sono i seguenti.

- Sia $\mathcal{A} = \{\text{unioni finite di intervalli disgiunti}\}$ e definiamo μ_G su $\mathcal{A}$:

$$\mu_G((a,b)) = G(b^-) - G(a), \quad \mu_G([a,b)) = G(b^-) - G(a^-), \quad \mu_G([a,b]) = G(b) - G(a^-)$$

e se $A = \cup_{i=1}^n I_i$, con I_i intervalli disgiunti,

$$\mu_G(A) = \sum_{i=1}^n \mu_G(I_i).$$

- $\mathcal{A}$ è un'algebra e μ_G è σ-additiva e finita su $\mathcal{A}$: per il teorema di Carathéodory esiste un'unica misura μ su $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ tale che $\mu \equiv \mu_G$ su $\mathcal{A}$.

b) Dev'essere $\mu(\mathbb{R}) = 1$:

$$1 = \mu(\mathbb{R}) = \lim_{x\to+\infty} \mu((-x,x]) = \lim_{x\to+\infty} \mu_G((-x,x]) = \lim_{x\to+\infty} \Big(G(x) - G(-x)\Big) = G(+\infty) - G(-\infty)$$

quindi il salto "globale" di G dev'essere 1. Dal teorema di rappresentazione di Skorohod, esiste almeno una v.a. X tale che $\mu \equiv \Lambda_X$. Inoltre,

$$F_X(x) = \Lambda_X((-\infty,x]) = \mu((-\infty,x]) = G(x) - G(-\infty)$$

cioè, posto $c = G(-\infty)$, dev'essere $F_X(x) = G(x) - c$, ovvero F_X è un'opportuna traslazione di G.

c) Poiché $g \geq 0$ q.o., $G = 1 + \int_{-\infty}^x g(t)\,dt$ è una funzione monotona crescente, continua e, dal momento che g è integrabile, anche limitata, dunque verifica le ipotesi richieste. Sia

$$\nu(A) = \int_A g(t)\,dt, \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Ora, $\pi = \{(-\infty,x]\,;\, x \in \mathbb{R}\}$ è un π-system che genera $\mathcal{B}$ e su π

$$\mu((-\infty,x]) = \mu_G((-\infty,x]) = G(x) - G(-\infty) = 1 + \int_{-\infty}^x g(t) - 1g(t) = \int_{(-\infty,x]} g(t)\,dt = \nu((-\infty,x])$$

Dunque, le misure finite μ e ν coincidono sul π-system π, quindi coincidono su $\sigma(\pi) = \mathcal{B}$:

$$\mu(A) = \nu(A) = \int_A g(t)\,dt, \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Allora, $\mu \ll \text{Leb}$ e $\frac{d\mu}{d\text{Leb}} = g$. Se $\mu = \Lambda_X$, si ha quindi $\frac{d\Lambda_X}{d\text{Leb}} = g$, che per definizione è la (una) densità di X.

Esercizio 2 1) Sia $\xrightarrow{\mathcal{A}}$ = convergenza q.c. Allora, esistono $N_X, N_Y \in \mathcal{F}$ tali che

$$\mathbb{P}(N_X) = 0 \text{ e per } \omega \notin N_X, \quad \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$
$$\mathbb{P}(N_Y) = 0 \text{ e per } \omega \notin N_Y, \quad \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega).$$

Posto $N = N_X \cup N_Y$, allora $\mathbb{P}(N) = 0$ e per $\omega \notin N$,

$$\lim_{n\to\infty} \Big(X_n(\omega) + Y_n(\omega)\Big) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) + \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = X(\omega) + Y(\omega),$$

cioè X_n+Y_n converge q.c. a $X+Y$.

2) Sia $\stackrel{\mathcal{A}}{\longrightarrow}$ = convergenza in probabilità. Fissato $\delta>0$,

$$\mathbb{P}\Big(|(X_n+Y_n)-(X+Y)|>\delta\Big)\le \mathbb{P}\Big(|X_n-X|>\delta/2\Big)+\mathbb{P}\Big(|Y_n-Y|>\delta/2\Big)$$

Poiché, per ogni $\delta>0$, $\mathbb{P}\Big(|X_n-X|>\delta/2\Big)\to 0$ e $\mathbb{P}\Big(|Y_n-Y|>\delta/2\Big)\to 0$ per $n\to\infty$, si ottiene, per ogni $\delta>0$, $\mathbb{P}\Big(|(X_n+Y_n)-(X+Y)|>\delta\Big)\to 0$ per $n\to\infty$, cioè $X_n+Y_n\to X+Y$ in probabilità.

3) Sia $\stackrel{\mathcal{A}}{\longrightarrow}$ = convergenza in L^p. Dalla disuguaglianza di Minkowski,

$$\begin{aligned}\Big(\mathbb{E}(|(X_n+Y_n)-(X+Y)|^p)\Big)^{1/p} &= \Big(\mathbb{E}(|(X_n-X)+(Y_n-Y)|^p)\Big)^{1/p}\\ &\le \Big(\mathbb{E}(|X_n-X|^p)\Big)^{1/p}+\Big(\mathbb{E}(|Y_n-Y|^p)\Big)^{1/p}\end{aligned}$$

da cui segue immediatamente la tesi.

3) Sia $\stackrel{\mathcal{A}}{\longrightarrow}$ = convergenza in legge. Prendiamo, ad esempio, due successioni costanti: $X_n=X$ e $Y_n=-X$, per ogni n. Ovviamente $X_n\to X$ in legge e $Y_n\to Y=-X$ in legge. Inoltre, $X_n+Y_n=0$. Però, prendiamo due v.a. U e V indipendenti e tali che U ha la stessa legge di X e V ha la stessa legge di $Y=-X$. Allora, si ha anche $X_n\to U$ in legge e $Y_n\to V$ in legge. Ora, se l'affermazione fosse vera, si avrebbe $X_n+Y_n=0\to U+V$ in legge, che dà $U+V=0$ q.c., il che non è vero in generale e prova l'assurdo (si immagini, ad esempio, $X\sim \mathrm{N}(0,1)$: allora $U\sim\mathrm{N}(0,1)$, $V\sim\mathrm{N}(0,1)$ e $U+V\sim\mathrm{N}(0,2)$).

Esercizio 3 a) La f.c. di X_n è $\varphi_n(\theta)=e^{i\theta\mu-\sigma_n^2\theta^2/2}$, che converge a $g(\theta)=e^{i\theta\mu}$ per $n\to\infty$. Poiché g è la f.c. di $X=\mu$ q.c., si ottiene $X_n\to\mu$ in legge, quindi $X_n\to\mu$ in probabilità. Studiamo la convergenza a μ in L^p: posto $Z_n=(X_n-\mu)/\sigma_n$, si ha che che $Z_n\sim\mathrm{N}(0,1)$ e

$$\mathbb{E}(|X_n-\mu|^p)=\sigma_n^p\,\mathbb{E}(|Z_n|^p)=\sigma_n^p\cdot M_p$$

dove M_p denota il momento p-esimo di una gaussiana standard. Allora, per ogni $p>0$, $\mathbb{E}(|X_n-\mu|^p)\to 0$ per $n\to\infty$, quindi X_n converge a μ in L^p.

b) Studiamo il comportamento delle code: fissato $\delta>0$,

$$\mathbb{P}(|X_n-\mu|>\delta)=\mathbb{P}(\sigma_n|Z_n|>\delta)=\mathbb{P}(|Z_1|>\delta/\sigma_n).$$

Ora, $\sigma_n\to 0$ quindi $\delta/\sigma_n\to\infty$. Allora, per n grande,

$$\mathbb{P}(|X_n-\mu|>\delta)=\mathbb{P}(|Z_1|>\delta/\sigma_n)\simeq\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\,\sigma_n\,e^{-\delta^2/(2\,\sigma_n^2)}$$

Ad esempio, se si sceglie $\sigma_n=1/\sqrt{n}$ allora, per n grande,

$$\mathbb{P}(|X_n-\mu|>\delta)\simeq\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,e^{-n\,\delta^2/2},$$

quindi $\sum_n \mathbb{P}(|X_n-\mu|>\delta)$ è una serie convergente per ogni $\delta>0$, da cui segue che $X_n\to\mu$ q.c.

Scegliamo ora $\sigma_n=1/\sqrt{\log n}$: si ha

$$\mathbb{P}(|X_n-\mu|>\delta)\simeq\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\,\frac{1}{\sqrt{\log n}}\,e^{-\delta^2/2\,\log n}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\delta}\,\frac{1}{n^{\delta^2/2}\,\log n}.$$

Quindi la serie $\sum_n\mathbb{P}(|X_n-\mu|>\delta)$ non converge se $\delta^2/2\le 1$: se si richiede l'indipendenza delle X_n, da BC2 segue che X_n non converge q.c.

Esercizio 4 a) Sia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x,y) = (x+y, x-y)$. ϕ è invertibile con inversa $\psi(u,v) = ((u+v)/2, (u-v)/2)$. Ora, poiché $(U,V) = \phi(X,Y)$, usando il TCV si ottiene

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y} \circ \phi(u,v)\, |\det J_\psi(u,v)|.$$

X e Y sono indipendenti di legge Exp(1), dunque $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x-y}\, 1\!\!1_{x>0,y>0}$ e si ottiene

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2}\, e^{-u}\, 1\!\!1_{u>|v|>0}.$$

Per le marginali, basta saturare:

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\, dv = \frac{1}{2}\, e^{-u}\, 1\!\!1_{u>0} \int_{-u}^{u} dv = u\, e^{-u}\, 1\!\!1_{u>0},$$
$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)\, du = \int_{|v|}^{\infty} \frac{1}{2}\, e^{-u}\, du = \frac{1}{2}\, e^{-|v|}$$

b) $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = 0$, ma U e V non sono indipendenti: la densità congiunta non si fattorizza nel prodotto delle densità marginali.

c) Osserviamo che $\mathbb{E}(U+V) = \mathbb{E}(2X) = 2$ e $\mathrm{Var}(U+V) = \mathrm{Var}(2X) = 4\mathrm{Var}(X) = 4$. Posto allora $Z_k = U_k + V_k$, le Z_k sono i.i.d., di media 2 e varianza 4. Il TLC garantisce che

$$\frac{\sum_{k=1}^n (Z_k - 2)}{2\sqrt{n}} \to Z \sim \mathrm{N}(0,1) \text{ in legge}, \quad n \to \infty.$$

Allora,

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^n (U_k + V_k - 2) > \sqrt{n}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{k=1}^n (Z_k - 2)}{2\sqrt{n}} > \frac{1}{2}\Big) \to 1 - \Phi(0.5), \qquad n \to \infty,$$

dove Φ denota, al solito, la f.d. di una gaussiana standard.

Esercizio 5 Si rimanda al libro di testo.