Prova scritta di CP2
25 gennaio 2002

Per il recupero del I esonero: esercizi 1, 2, 3, 4 (2 ore a disposizione).
Per il recupero del II esonero: esercizi 5, 6, 7, 8 (2 ore a disposizione).
I appello: un esercizio scelto tra 1 e 2; un esercizio scelto tra 3 e 4; esercizi 5, 6, 7 (3 ore a disposizione).

Esercizio 1 Sia dato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove con $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e, per $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = 2 \int_A e^{-2\,\xi}\, 1\!\!1_{\xi>0}\, d\xi.$$

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$.

a) Verificare che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è uno spazio di probabilità e che X è una v.a., con legge Exp(2).

b) Posto $Y = 1\!\!1_{X\in(0,1)} - 1\!\!1_{X\in\mathbb{N}}$, scrivere $\sigma(Y)$ (= sigma algebra generata da Y) e dire qual è la legge di Y.

Esercizio 2 Siano $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Su $(\Omega, \mathcal{F})$, siano $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ definite da

$$\mathbb{P}_i(A) = \sum_{k\in A} p_i(k), \quad A \subset \Omega, \quad i = 1, 2$$

(con $\mathbb{P}_i(\emptyset) := 0$) dove, per $\rho \in (0,1)$ e $N \in \mathbb{N}$ fissati,

$$\text{(misura geometrica)} \quad p_1(k) = \rho^k\,(1-\rho), \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\text{(misura binomiale)} \quad p_2(k) = \begin{cases} \binom{N}{k} \rho^k\,(1-\rho)^{N-k} & \text{se } k = 0, \ldots, N \\ 0 & \text{se } k > N \end{cases}$$

a) Verificare che $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ sono due misure di probabilità.

b) Mostrare che $\mathbb{P}_1 \not\ll \mathbb{P}_2$ ma che $\mathbb{P}_2 \ll \mathbb{P}_1$, e scrivere $\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1}$.

Esercizio 3 Media, varianza e covarianza: definizione e significato probabilistico.

Esercizio 4 Dimostrare che il prodotto di due v.a. indipendenti di L^1 è una v.a. di L^1, con media pari al prodotto delle due medie.

Esercizio 5 Sia $\{X_k\}_k$ una successione di v.a. i.i.d., ciascuna con densità

$$p(x) = \frac{1}{2x}\, 1\!\!1_{e^{-1}<x<e}.$$

Posto $Y_n = \left(\prod_{k=1}^n X_k\right)^{1/n}$ e di $Z_n = \left(\prod_{k=1}^n X_k\right)^{1/\sqrt{n}}$, dimostrare che per ogni $g \in C_b$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Y_n)) = g(1) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = \int \frac{g(e^z)}{\sqrt{2\pi/3}}\, e^{-3\,z^2/2}\, dz.$$

Esercizio 6 Siano X e Y due v.a. con densità congiunta

$$p(x,y) = c\sqrt{x^2+y^2}\,1\!\!1_{x^2+y^2\le 1}$$

a) Calcolare c e la densità congiunta di $U = |X|$ e $V = Y/X$. U e V sono indipendenti? E la terna (Y,U,V) ha densità di probabilità?

b) Per $n \ge 1$, sia R_n la distanza di (X_n, Y_n) dall'origine, con (X_n, Y_n) copie indipendenti di (X,Y). Studiare la convergenza di $\{D_n\}_n$, dove $D_n = \min(R_1, \dots, R_n)$.

Esercizio 7 Enunciare, dimostrare a grandi linee e discutere le applicazioni del teorema di convergenza di Lévy.

Esercizio 8 È vero che se una successione di v.a. converge q.c. allora converge in L^p? Ed è vero il viceversa? (Giustificare le risposte).

Esercizio 1 a) $\mathbb{P}(A)$ è della forma $\int_A g(\xi)\,d\xi$, con $g(\xi) = 2\,e^{-2\xi}\,1\!\!1_{\xi>0} \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathrm{Leb})$, quindi $\mathbb{P}$ è una misura[1] su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Inoltre, $\int_{\mathbb{R}} g(\xi)\,d\xi = 1$, quindi $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità.

X è l'applicazione identica, quindi è misurabile, dunque X è una v.a. Inoltre,

$$\Lambda_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega\,:\,X(\omega) \in A\}) = \mathbb{P}(A) = \int_A g(\xi)\,d\xi$$

dove g è la densità esponenziale di parametro 2, quindi $X \sim \mathrm{Exp}(2)$.

b) $\sigma(Y) = \{Y^{-1}(A),\, A \in \mathcal{B}\}$. Osserviamo che Y può assumere solo tre valori: $Y(\omega) = 1$ per $\omega \in A_1 = (0,1)$, $Y(\omega) = -1$ per $\omega \in A_2 = \mathbb{N}$, $Y(\omega) = 0$ per $\omega \in A_3 = (0,1)^c \cap \mathbb{N}^c$. Ora, poiché A_1, A_2 e A_3 sono disgiunti, si ha

$$\sigma(Y) = \{\emptyset, \mathbb{R}, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3\}.$$

Y è una v.a. in discreta a valori in $E_Y = \{-1, 0, 1\}$ tale che

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) = 0, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X \in (0,1)) = \int_0^1 2\,e^{2\xi}\,d\xi = 1 - e^{-2},$$
$$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - 0 - (1 - e^{-2}) = e^{-2}.$$

Ma allora Y è una bernoulliana di parametro $p = 1 - e^{-2}$.

Esercizio 2 a) Occorre far vedere che $\sum_k p_i(k) = 1$, $i = 1, 2$, il che è immediato (serie geometrica e binomio di Newton).

b) Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\{N+1, N+2, \ldots\}$. Ovviamente $\mathbb{P}_2(A) = 0$ mentre $\mathbb{P}_1(A) > 0$, dunque $\mathbb{P}_1 \not\ll \mathbb{P}_2$.

Ora, osserviamo che $\mathbb{P}_1(A) = 0$ se e solo se $A = \emptyset$, da cui segue che $\mathbb{P}_2 \ll \mathbb{P}_1$. Inoltre, per ogni $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$,

$$\mathbb{P}_2(A) = \sum_{k \in A} p_2(k) = \sum_{k \in A} \frac{p_2(k)}{p_1(k)}\,p_1(k).$$

Posto quindi $g(k) = \frac{p_2(k)}{p_1(k)}$ per $k \in \Omega$, si ha

$$\mathbb{P}_2(A) = \sum_{k \in A} g(k)\,p_1(k) = \int_A g(\omega)\,\mathbb{P}_1(d\omega),$$

cioè $g = \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1}$.

Esercizio 3 Si rimanda al libro di testo.

Esercizio 4 Si rimanda al libro di testo.

Esercizio 5 Poniamo $\widehat{Y}_n = \log Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log X_k$. Le v.a. $\log X_k$ sono i.i.d.: usando la LGN,

$$\widehat{Y}_n \to \mu = \mathbb{E}(\log X_1) = \int_{e^{-1}}^{e} \frac{\log x}{2x}\,dx = 0 \qquad \text{q.c.}$$

Ora, $Y_n = f(\widehat{Y}_n)$, con $f(x) = e^x$ continua, quindi $Y_n \to f(0) = 1$ q.c. Infine, la convergenza q.c. implica la convergenza in legge, quindi per ogni $g \in C_b$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Y_n)) = \mathbb{E}(g(1)) = g(1).$$

[1] Per i dettagli si rimanda al corso.

Oppure, basta osservare che $W_n := g(Y_n) = g\circ f(\widehat{Z}_n) \to g\circ f(0) = g(1) =: W$ q.c. perché $g\circ f$ è continua, e $|W_n| \le M$, con $M > 0$, perché $g\circ f \in C_b$. Allora usando DOM segue che $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}(W) = g(1)$.

Per Z_n procediamo analogamente. Poniamo $\widehat{Z}_n = \log Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \log X_k$. Le v.a. $\log X_k$ sono i.i.d. con media nulla e varianza $1/3$: usando il TLC,

$$\widehat{Z}_n \to Z \ \text{ in legge, con } Z \sim \mathrm{N}(0, 1/3)$$

Ora, $Z_n = f(\widehat{Z}_n)$, con $f(x) = e^x$ continua, quindi presa $g \in C_b$, si ha che $g(Z_n) = g\circ f(\widehat{Z}_n)$ e $g\circ f \in C_b$. Allora,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g\circ f(\widehat{Z}_n)) = \mathbb{E}(g\circ f(Z)) = \mathbb{E}(g(e^Z)) = \int_{\mathbb{R}} g(e^z)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi/3}}\, e^{-3\,z^2/2}\, dz.$$

Infine, osserviamo che i passaggi al log che sono stati fatti sono giustificati dal fatto che le X_k sono v.a. positive q.c.

Esercizio 6 a) Si ha

$$c^{-1} = \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\, d\rho = \frac{2}{3}\,\pi,$$

quindi $c = 3/(2\pi)$.

$(U, V) = \phi(X, Y)$, dove $\phi(x, y) = (|x|, y/x)$. Poniamo quindi

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y)\,:\, x>0\}, \qquad & \phi_1(x,y) &= (x, y/x);\\ A_2 &= \{(x,y)\,:\, x<0\}, \qquad & \phi_2(x,y) &= (-x, y/x). \end{aligned}$$

Le ϕ_i sono regolari e invertibili con inverse

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y) &= (u, uv), \qquad & (u,v) &\in \phi_1(A_1) = \{(u,v)\,:\, u>0\},\\ \psi_2(x,y) &= (-u, -uv), \qquad & (u,v) &\in \phi_2(A_2) = \{(u,v)\,:\, u>0\}. \end{aligned}$$

Poiché $\mathbb{P}((X,Y) \in A_1 \cup A_2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1$, usando il TLC segue che

$$f_{U,V}(u,v) = \sum_{i=1}^2 f_{X,Y}\circ\psi_i(u,v)\, |\det J_{\psi_i}(u,v)|\, 1\!\!1_{(u,v)\in\phi_i(A_i)} = \frac{3}{\pi}\, u\sqrt{1+v^2}\, 1\!\!1_{u>0, u^2(1+v^2)\le 1}.$$

Dunque $f_{U,V}$ non si fattorizza el prodotto di due funzioni dipendenti l'una dalla sola u e l'altra dalla sola v, quindi U e V non sono indipendenti.

La terna (Y, U, V) non ha densità. Si prenda, ad esempio, $A = \{(y,u,v)\,:\, y>0, v>0, y = uv\}$: $\mathrm{Leb}_3(A) = 0$ ma $\mathbb{P}((Y,U,V)\in A) = \mathbb{P}(Y>0, X>0) > 0$.

b) Cerchiamo la f.d. di R_n: per $0 < r < 1$,

$$F_n(r) = \mathbb{P}(R_n \le r) = \mathbb{P}(X^2+Y^2 \le r^2) = \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^2\, d\rho = r^3$$

e $F_n(r) = 0$ se $r \le 0$, $F_n(r) = 1$ per $r \ge 1$. Quindi, fissato $\delta > 0$, e usando l'indipendenza delle R_n,

$$\mathbb{P}(D_n > \delta) = \mathbb{P}(R_1 > \delta, \ldots, R_n > \delta) = \mathbb{P}(R_1 > \delta)\cdots\mathbb{P}(R_n > \delta) = (1-\delta^3)^n$$

purché $\delta \in (0,1)$, altrimenti $\mathbb{P}(D_n > \delta) = 0$. Ma allora, per ogni $\delta > 0$, la serie $\sum_n \mathbb{P}(D_n > \delta) = \sum_n \mathbb{P}(|D_n| > \delta)$ converge, quindi $D_n \to 0$ q.c.

Esercizio 7 Si rimanda al libro di testo.

Esercizio 8 No, però se si impongono opportune ipotesi di dominazione, usando DOM l'implicazione può essere vera. Anche il viceversa è falso in generale, però si può dire che esiste una sottosuccessione che converge q.c. Per i dettagli (controesempi inclusi) si rimanda al libro di testo.