CP1 – ESAME DEL 10 FEBBRAIO 2003

Soluzioni

1.

a) $E[2X + 3Y] = 2E[X] + 3E[Y] = 5$
b) $\mathrm{Var}[2X + 3Y] = 4\mathrm{Var}[X] + 9\mathrm{Var}[Y] = 26$
c) $E[XYZ] = E[X]E[Y]E[Z] = 1$
d) $\mathrm{Var}[XYZ] = E[(XYZ)^2] - E[XYZ]^2 = E[X^2]E[Y^2]E[Z^2] - 1 = (\mathrm{Var}[X] + 1)^3 - 1 = 26$

2. $P(W_i = k) = (1 - p_i)^{k-1} p_i$, $i = 1, 2$. Ponendo $q_i := 1 - p_i$

a) $P(W_1 = W_2) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(W_1 = k)P(W_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{k-1} p_1 p_2 = \frac{p_1 p_2}{1 - q_1 q_2}$$

b) $P(W_1 < W_2) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(W_1 = k)P(W_2 > k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(W_1 = k) \sum_{j=1}^{\infty} P(W_2 = k + j) = \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2}$$

c) $P(\min\{W_1, W_2\} \geq k) = P(W_1 \geq k)P(W_2 \geq k) = (q_1 q_2)^{k-1}$, e quindi si ha

$P(\min\{W_1, W_2\} = k) = P(\min\{W_1, W_2\} \geq k) - P(\min\{W_1, W_2\} \geq k+1) = (q_1 q_2)^{k-1}(1 - q_1 q_2)$

cioè $\min\{W_1, W_2\}$ è geometrica di parametro $1 - q_1 q_2$.

3. $X = \tan Z$, dove $Z = \pi U - \pi/2$ è uniforme in $(-\pi/2, \pi/2)$. Quindi poiché $\tan$ è strettamente crescente in $(-\pi/2, \pi/2)$

$$F_X(r) = P(X \leq r) = P(Z \leq \arctan r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\arctan r} dz = \frac{1}{\pi} \arctan r + \frac{1}{2}\,.$$

Segue che la densità di X è data da $f_X(r) = F_X'(r) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$.

4. Se $\int\int f(y, z) dy dz = 1$ allora si deve avere $k = 6$. Infatti

$$\int\int f(y, z) dy dz = k \int_0^1 dz \int_0^z (z - y) dy = k \int_0^1 \frac{z^2}{2} dz = \frac{k}{6}\,.$$

a) densità marginale:

$$f_Y(y) = \int f(y,z)dz = \int_y^1 6(z-y)dz = \begin{cases} 3(1-y)^2 & y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) densità condizionata:

$$f_Z(z|Y=y) = \frac{f_{Y,Z}(y,z)}{f_Y(y)} = \frac{6(z-y)}{3(1-y)^2}\,, \quad 0 < y \leq z < 1\,.$$

Dato $Y = 1/2$ si ha $f_Z(z|Y = 1/2) = 8(z - 1/2)$ e quindi

$$P(Z < 2/3|Y = 1/2) = \int_{1/2}^{2/3} 8(z-1/2)dz = 1/9\,.$$

5.

a) Matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

b) $\beta = 0$, cioè $\alpha = 1$. I due stati “1” e “4” sono assorbenti quindi entrambe $\mu^1 := (1,0,0,0)$ e $\mu^2 := (0,0,0,1)$ sono misure invarianti per P. Ne segue che $\mu^p := p\mu^1 + (1-p)\mu^2$ è invariante per ogni $p \in [0,1]$.

c) $\beta > 0$. Risolvendo le equazioni $\sum_i \mu_i P_{ij} = \mu_j$ si trova l'unica misura invariante $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ data da:

$$\mu_1 = \mu_4 = \frac{1}{2(1+\beta)}\,, \quad \mu_2 = \mu_3 = \frac{\beta}{2(1+\beta)}$$