

**Esercizio 1.**

Con un lancio di tre dadi è più probabile che la somma sia 11 oppure 12 ?

**Esercizio 2.**

Una scatola contiene due monete normali e una con testa su entrambe le facce.

- (1) Una moneta scelta a caso viene lanciata e il risultato è testa. Qual'è la probabilità che si tratti della moneta fasulla ?
- (2) Supponiamo di dover indovinare quale delle tre è la moneta fasulla. Apriori la probabilità di indovinare è chiaramente  $1/3$ . Di quanto aumenta la probabilità di indovinare dopo il lancio di una moneta scelta a caso ?

**Esercizio 3.**

Sia  $X$  una variabile uniforme in  $[0, 1]$ . Sia  $U$  il minimo tra  $X$  e  $1 - X$  e si ponga  $V = 1 - U$ . Calcolare la densità di probabilità di  $U$ ,  $V$  e del rapporto  $V/U$ . Calcolare infine  $\mathbb{E}(U)$ ,  $\mathbb{E}(V)$  e  $\mathbb{E}(V/U)$ .

**Esercizio 4.**

Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variabili indipendenti di Bernoulli di parametro  $p = \frac{1}{2}$ , e  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  variabili indipendenti di Poisson di parametro  $\lambda = 3/4$ . Se  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  e  $W_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  si considerino gli eventi

$$A_n = \left\{ S_n \geq \frac{1}{2}n + \alpha\sqrt{n} \right\}, \quad B_n = \left\{ W_n \geq \frac{3}{4}n + \beta\sqrt{n} \right\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Calcolare l'insieme dei valori di  $\alpha$  e  $\beta$  tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$$

**Esercizio 5.**

Sei palline, 4 bianche e 2 nere, sono distribuite in due urne  $A$  e  $B$  in maniera che ciascuna urna contenga 3 palline. Ad ogni unità di tempo due palline scelte a caso - una da  $A$  e una da  $B$  - vengono scambiate. In questo modo si ottiene una catena di Markov.

- (1) Determinare lo spazio degli stati, la matrice di transizione e la misura invariante della catena.
- (2) Sia  $E_n$  l'evento che al tempo  $n$  l'urna  $A$  contiene due palline bianche e una nera. Supponendo che al tempo zero l'urna  $A$  contiene due palline nere e una bianca (e l'urna  $B$  tre bianche), calcolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n)$ .

**Esercizio 6.**

Discutere, illustrando con esempi e giustificando i passaggi, due tra i seguenti punti.

- (1) Legge dei grandi numeri.
- (2) Variabili Gaussiane  $N(\mu, \sigma^2)$  e loro proprietà fondamentali.
- (3) Rappresentazione di una variabile di Poisson in termini di variabili esponenziali.
- (4) Proprietà di Markov. Esempi di sequenze di variabili aleatorie non markoviane.
- (5) Rappresentazione di variabili Gaussiane mediante il metodo Box-Muller