Tutorato di CP1 del 15 Aprile 2002

Dr. Luca Di Persio

Esercizio 1

Il computer di una stazione radar registra l'arrivo di un segnale aleatorio usando come unità di misura il secondo. Ad ogni secondo, indipendentemente da quello che è successo nel passato, il segnale arriva con probablità p o non arriva con probabilità 1-p. Si supponga, inoltre, che ad ogni secondo si registri l' arrivo di uno ed un solo segnale.

1) Qual' è la probabilità che il primo segnale arrivi ad un istante di tempo dispari ?

2) Indicato con T_1 il tempo di attesa del k-esimo segnale, qual' è la distribuzione di T_k ?

3) Calcolare la probabilità che il primo segnale arrivi al secondo i, se il secondo segnale arriva al tempo j $(j > i)$.

4) In media quando arriva il k-esimo segnale ?

Esercizio 2

Sia $X_t, t \geq 1$ una variabile aleatoria che può assumere il valore $+1$ con probabilità p e -1 con probabilità 1-p, supponiamo che $p = \frac{1}{2}$. Definiamo, per $T \geq 1$, $S_T \equiv \sum_{t=1}^{i=T} X_t$ $(S_0 = 0)$ e chiamiamo u_{2T} la probabillità che $S_{2T} = 0$, $P(S_{2T} = 0) \equiv u_{2T}$. Ricordando la formula di Stirling, dimostrare che $u_{2T} \simeq \frac{1}{\sqrt{2T}}$. [1]

[1] Questo è un esempio semplice di passeggiata casuale (Random Walk) su reticolo. La variabile aleatoria S_T può essere vista come la posizione occupata su un reticolo unidimensionale, a coordinate intere, da una particella che, ad ogni istante temporale, effettui un salto a destra con probablità p oppure a sinistra con probablità q=1-p. Nel caso in cui p=q=$\frac{1}{2}$ si parla di Random Walk simmetrico.

Soluzione Esercizio 1

Sia T_1 il tempo di arrivo del primo segnale. In virtù dell' ipotesi di indipendenza fra ciò che accade in tempi diversi T_1 ha densità di probablità geometrica di parametro p:

$$P(T_1 = n) = \begin{cases} (1-p)^{n-1}p & n = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Pertanto:

$$P(T_1 \in \{3, 5, 7, \ldots\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T_1 = 2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{2k} = \frac{1}{2-p}$$

Il tempo di arrivo del k-esimo segnale ha valore j, se e solo se nei primi j secondi sono arrivati esattamente k-1 segnali ed il k-esimo è arrivato al secondo k, cosicché :

$$P(T_k = j) = \binom{j-1}{k-1}(1-p)^{j-k}p^k \;\; j = k, k+1, \ldots$$

Sia S_i l' evento *Al secondo i arriva un segnale*, allora:

$$P(T_1 \cap T_2) = \begin{cases} P(S_1^c \cdots S_{i-1}^c S_i \; S_{i+1}^c \cdots S_{j-1}^c \; S_j) = (1-p)^{j-2}p^2 & i < j \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Pertanto:

$$P(T_1 = i \mid T_2 = j) = \frac{P(T_1 = i \cap T_2 = j)}{P(T_2 = j)} = \begin{cases} \frac{(1-p)^{j-2}p^2}{\binom{j-1}{2-1}(1-p)^{j-2}p^2} = \frac{1}{j-1} & i = 1, \ldots, j-1 \\ 0 & i \geq j \end{cases}$$

Siano I_1 il tempo di arrivo del primo segnale, I_2 il tempo intercorrente tra il primo arrivo ed il secondo e cosí via per I_k, $k \geq 1$.

Allora $E(T_k) = \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{k} I_j) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}(I_j)$. I_1 ha densità geometrica di parametro p e lo stesso accade per I_k con k qualsiasi, data l' ipotesi di indipendenza iniziale; ne viene che :

$$\mathbb{E}(T_k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}(I_j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p} = \frac{k}{p}$$

Soluzione Esercizio 2

Chiaramente deve essere:

$$u_{2n} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}$$

Ricordando la formula di Stirling: $n! \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ che fornisce un' approssimazione della funzione fattoriale per n grandi, otteniamo:

$$u_{2n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$