Soluzioni Scritto CP1 del 17 Luglio 2002

Soluzione Esercizio 1

Nel primo punto le ipotesi del testo suggeriscono direttamente l' uso della distribuzione *multinomiale*, quindi, se chiamiamo A l' evento di cui ci è chiesto di calcolare la probabilità, abbiamo:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}\left(\frac{N_1}{N}\right)^{k_1}\left(\frac{N_2}{N}\right)^{k_2}\left(\frac{N_3}{N}\right)^{k_3}$$

Sia $B \equiv \{\textit{estrazione di 5 carte del medesimo seme da un mazzo di 52 senza rimpiazzo}\}$, poiché nel nostro caso non è stato specificato un seme particolare e vi sono esattamente 13 carte per ogni seme nel mazzo tutto intero, ne viene che:

$$\mathbb{P}(B) = 4\frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

Soluzione Esercizio 2

Indichiamo con $p_k \equiv \mathbb{P}(\{\textit{Il giocatore A vince l'incontro in k sets}\})$, allora si avrà:

$$p_3 = p^3 \quad ; \quad p_4 = 3p^3(1-p) \quad ; \quad p_5 = 6p^3(1-p)^2$$

Se indichiamo con $V \equiv \{\textit{Il giocatore A ha vinto i 3 sets}\}$ e con $W \equiv \{\textit{Il giocatore A ha vinto}\}$, ricordando la formula di Bayes, otteniamo:

$$\mathbb{P}(V \mid W) = \frac{p_3}{\sum_{i=3}^{5} p_i}$$

Soluzione Esercizio 3

Per calcolare la funzione di densità della v.a. Y è sufficiente considerare:

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{1}{2}\,\chi_{\{0<y-x<2\}}(x)dx$$

ottenendo cossí:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3-y}{2} & 2 \le y \le 3 \\ \frac{1}{2} & 1 < y < 2 \\ \frac{y}{2} & 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 4

Siano T_A e T_B i tempi di arrivo di A e B. Ci viene chiesto di calcolare:

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left(\{T_A < T_B\} \cap \{T_A < T_B + \frac{1}{6}\}\right)$$

Considerando che l'intervallo temporale, 30 min., utile per l'arrivo di A e B è suddiviso in 6 intervallini di 5 min. ciascuno, abbiamo:

$$\mathbb{P}(C) = \int_{\frac{5}{6}}^{1} x dx = \frac{1}{2} - \frac{25}{72} \simeq 0.6527$$

Soluzione Esercizio 5

Con le definzioni date nel testo abbiamo per il primo punto:

$$\mathbb{P}(T_1 < T_2) = \int_0^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \left(\int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt \right) ds = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

mentre per il secondo punto otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\{X = 1\} \cap \{T_{min} \in (a,b)\}\right) = \mathbb{P}\left(\{a < T_1 < b\} \cap \{T_2 > T_1\}\right) = \\
&= \int_1^b \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \left(\int_s^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} dt \right) ds = \int_a^b \lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} ds = \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(e^{-(\lambda_1+\lambda_2)a} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)b} \right) = \mathbb{P}\left(\{X = 1\}\right) \mathbb{P}\left(\{T_{min} \in (a,b)\}\right)
\end{aligned}$$

cosicchè resta dimostrata l' indipendenza dei due eventi.